

THÉORIE DES GRAPHS

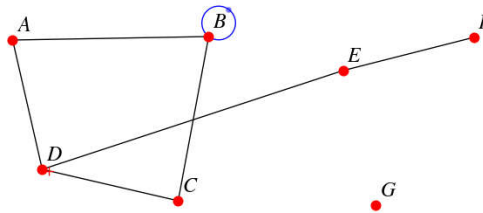
1 – GÉNÉRALITÉS :

1) Définitions :

- a) Un graphe fini est un ensemble de points appelés sommets, qui peuvent être reliés entre eux par des segments ou des courbes, appelés arêtes.
- b) Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- c) Un point peut être relié à lui-même. L'arête ainsi construite s'appelle une boucle.
- d) Un sommet est dit isolé lorsqu'aucune arête ne le relie à un autre sommet.

Remarque : Il n'est pas obligatoire que les sommets portent des étiquettes. Généralement, on utilise des lettres ou bien des nombres.

Exemple :



Le sommet D est adjacent avec A, C et E. Il y a une boucle en B. G est isolé. B et F ne sont pas adjacents.

2) Définitions :

- a) L'ordre d'un graphe correspond au nombre de ses sommets.
- b) Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes reliées à ce sommet en sachant qu'une boucle compte double.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, qui est un graphe d'ordre 7. Présentant les degrés dans un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	2	3	2	1	0

3) La formule d'Euler :

- a) Propriété : La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes. Par conséquent, la somme des degrés est un nombre pair.

Remarque : la formule d'Euler est aussi appelée formule des poignées de main. En effet, lorsque deux sommets sont adjacents, l'arête qui les joint est comptée deux fois dans la somme des degrés. Il se passe la même chose lorsque deux personnes se serrent la main et que l'on fait la somme des toutes les poignées de main.

La formule est vérifiée pour l'exemple précédent.

- b) Applications : A l'aide de la formule d'Euler, on peut :

- i) Calculer le nombre d'arêtes d'un graphe à partir des degrés des sommets ;
- ii) Construire un graphe à partir de son nombre d'arêtes et de son ordre ;
- iii) Raisonner sur des petits problèmes de réseau.

4) Quelques cas particuliers :

- a) Un graphe est simple lorsque le graphe est sans boucle et lorsque il y a au plus une arête entre deux sommets.
- b) Un graphe est complet s'il est simple et si chaque sommet est adjacent à tous les autres.
- c) Un graphe est orienté lorsque les arêtes ont un sens. On matérialise ces sens par des flèches.
- d) Un graphe est pondéré lorsque chaque arête est associée à un réel positif, qui attribue un poids à cette arête.
- e) Un graphe probabiliste est un graphe pondéré et orienté pour lequel, pour chaque sommet, la somme des poids des arêtes issues de ce sommet vaut 1.

Remarque : la formule d'Euler ne fonctionne pas pour un graphe orienté.

4) Chaînes et cycles :

a) Considérons un graphe non orienté.

- i) Une chaîne est une suite d'arêtes consécutives dans le graphe. On la nomme par la liste ordonnée de sommets qui la composent. Donc chaque sommet de la liste est adjacent au sommet suivant.
- ii) La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la constituent.
- iii) Un graphe est connexe si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.
- iv) Une chaîne est simple lorsqu'elle ne repasse pas deux fois par la même arête
- v) Une chaîne est fermée lorsque ses extrémités coïncident.
- vi) Un cycle est une chaîne simple et fermée.
- vii) Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient toutes les arêtes du graphe, une et une seule fois.
- viii) Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée.
- ix) Un graphe eulérien est un graphe qui contient au moins un cycle eulérien.

b) Considérons un graphe orienté :

- i) Un chemin est une suite d'arêtes consécutives et orientées dans le graphe.
- ii) La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes orientées qui la constituent.
- iii) Il y a plusieurs définitions de la connexité pour les graphes orientés. On en considère deux :
Connexité forte : Un graphe orienté est connexe si chaque couple de sommet est relié par un chemin.
Connexité faible : Un graphe orienté est connexe si le graphe non orienté associé est connexe.

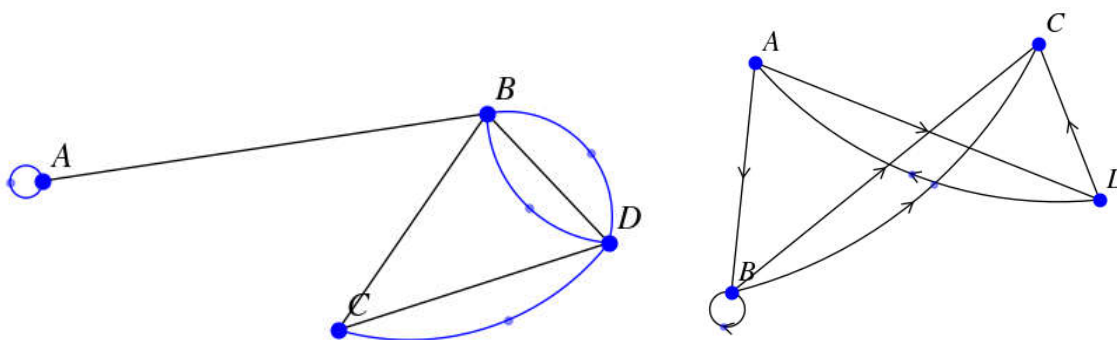
5) Quelques résultats :

- a) Une graphe complet est connexe. La réciproque est fausse.
- b) Tous les sommets d'un graphe complet ont le même degré. Si on note n l'ordre du graphe, ce même degré vaut $n - 1$.
- c) Soit G un graphe connexe. G est un graphe eulérien si et seulement si tous les sommets de G sont de degrés pairs.
- d) Soit G un graphe connexe. G possède une chaîne eulérienne d'extrémités A et B si et seulement si A et B sont les deux seuls sommets de degrés impairs.
- e) Soit G un graphe connexe. G possède une chaîne eulérienne si et seulement si G possède 0 ou 2 sommets de degrés impairs.

2 – MATRICE D'ADJACENCE :

1) Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons un graphe d'ordre n , orienté ou non, dont les sommets sont numérotés de 1 à n . La matrice d'adjacence associée à G , est la matrice carrée de taille n dont chaque coefficient $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet numéroté i au sommet numéroté j . Si le graphe est orienté, on tient compte du sens des arêtes dans le décompte.

Exemple : Considérons les deux graphes suivants. Déterminons leurs matrices d'adjacence.



Démonstration : Remarquons que le premier graphe n'est pas orienté et le deuxième graphe, par contre, est orienté. Les deux graphes sont d'ordre 4 donc les matrices sont de taille 4.

$$M(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Premières propriétés :

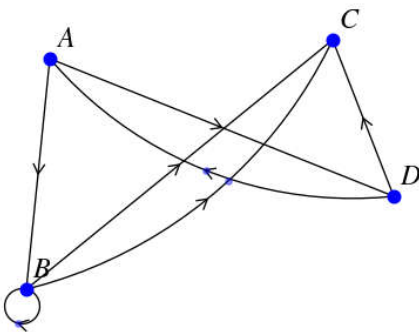
- a) Une fois que l'on a fixé l'ordre des sommets, la matrice d'adjacence d'un graphe est unique.
- b) Si le graphe ne contient pas de boucle, les coefficients diagonaux de la matrice d'adjacence sont nuls.
- c) Si le graphe est simple, la matrice d'adjacence ne contient que des 0 et des 1.
- d) Si le graphe n'est pas orienté, la matrice d'adjacence est symétrique.
- e) Si le graphe n'est pas orienté, la somme des coefficients d'une ligne donne le degré du sommet correspondant.

3) Nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons un graphe d'ordre n , orienté et A sa matrice d'adjacence. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de la matrice A^k correspond au nombre de chemins de longueur k entre le sommet numéroté i et le sommet numéroté j .

Remarque : si le graphe n'est pas orienté, le résultat est identique mais dénombre le nombre de chaînes de longueur k entre le sommet i et le sommet j .

Exemple : Reprenons le graphe ci-dessous et déterminons le nombre de chemin de longueur 3 entre le sommet D et le sommet C.



Démonstration : La matrice d'adjacence est $M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour trouver le nombre de chemins de longueurs 3, nous devons calculer $M^3(G_2)$. Tout d'abord, $M^2(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis

$M^3(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. En prenant le coefficient de la 4^e ligne et de la 3^e colonne, nous pouvons affirmer qu'il y a 3 chemins de longueurs 3 entre D et C.

4) Caractérisation de la connexité : Soit $n \geq 2$, un entier. Considérons un graphe d'ordre n , orienté et A sa matrice d'adjacence. G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \dots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Remarque : La caractérisation reste valable si le graphe n'est pas orienté.

Le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de la matrice $I_n + A + \dots + A^{n-1}$ représente le nombre de chemins de longueurs inférieures ou égales à $n - 1$, reliant le sommet i et le sommet j .

Exemple avec le graphe précédent : est-il connexe ?

Démonstration : Le graphe est d'ordre 4. Calculons :

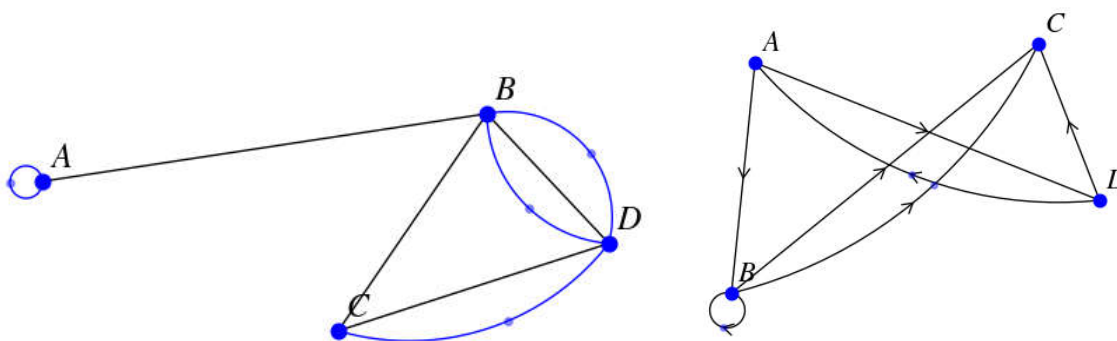
$$I_4 + M(G_2) + M^2(G_2) + M^3(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Cette}$$

matrice a des coefficients nuls donc le graphe n'est pas connexe.

3 – LISTE D'ADJACENCE :

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons un graphe d'ordre n , orienté ou non, dont les sommets sont numérotés de 1 à n . La liste d'adjacence associée à G , est la liste de taille n dont chaque coefficient L_i est égal à liste des sommets qu'on peut atteindre directement à partir du sommet numéroté i . Si le graphe est orienté, on tient compte du sens des arêtes dans le décompte.

Exemple : Considérons les deux graphes précédents Déterminons leurs listes d'adjacence.



Démonstration : Remarquons que le premier graphe n'est pas orienté et le deuxième graphe, par contre, est orienté. Les deux graphes sont d'ordre 4 donc les listes sont de taille 4.

$$L(G_1) = [[A, B], [A, C, D], [B, D], [B, C]] \text{ et } L(G_2) = [[A, D], [B, C], [B], [A, C]].$$

4 – ALGORITHMIQUE : L'ALGORITHME DE DIJKSTRA

1) Objectif : Cet algorithme permet de déterminer le plus court chemin entre deux points d'un graphe pondéré.

2) Principe : si on le fait tourner à la main, on construit un tableau à double entrée avec en colonne les sommets ordonnés et en ligne les étapes. On ajoute une colonne qui correspond au choix provisoire du sommet de poids minimal. A partir d'un graphe pondéré, orienté ou non, on choisit un sommet de départ et un sommet d'arrivée.

Procédure 1 : on affecte au sommet de départ un poids de 0 et on affecte un poids provisoire infini à tous les autres sommets.

Procédure 2 : on regarde les sommets adjacents au sommet de départ. On ajoute le poids du point de départ au poids des arêtes qui mènent à ces sommets. Le sommet de départ est éliminé et on marque entre parenthèses de quel sommet provient cette arête.

Procédure 3 : on prend sur la même ligne le sommet non éliminé dont le poids est minimal et on le marque dans la colonne choix avec son poids (ce sommet devient le nouveau sommet de départ) et on refait la procédure 2. Si deux sommets ont le même poids, on en choisit un des deux de manière arbitraire. Lorsqu'en ajoutant le poids d'une arête, un sommet non éliminé prend un poids supérieur à un poids qu'il avait précédemment, on ne tient pas compte de ce chemin et on reprend le poids précédent (avec sa provenance). Si un sommet de poids minimal provisoire mène à des points déjà éliminés, on reprend la démarche pour un sommet de poids immédiatement supérieur.

L'algorithme est réalisé lorsque tous les sommets autres que le sommet d'arrivée sont éliminés.

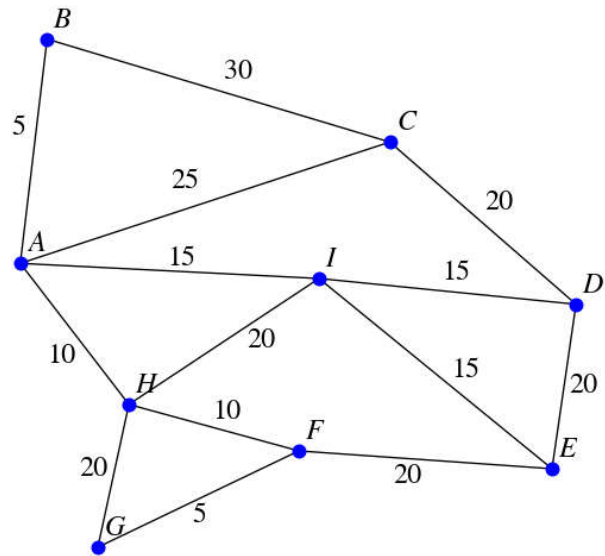
Il faut reconstituer le chemin de poids le plus petit.

Procédure 4 : Pour cela, on part à l'envers à partir du sommet final et on détermine le sommet qui lui était adjacent, vu que celui-ci est marqué entre parenthèses.

Procédure 5 : on refait la procédure 4, point par point jusqu'à revenir au sommet de départ.

Procédure 6 : on reconstitue le chemin dans le bon ordre à partir du sommet de départ, jusqu'au sommet d'arrivée.

Exemple : On modélise un réseau autoroutier entre 9 villes de France avec un graphe pondéré, dont les poids représentent les montants en euros des péages entre les villes.



Déterminer le trajet autoroutier de prix minimal qui mène de la ville C à la ville G.

Démonstration : min veut dire poids minimal sur la colonne.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	Choix
inf	inf	C(0)	inf	inf	inf	inf	Inf	inf	C(0)
25(C)	30(C)		20(C)	inf	inf	inf	Inf	inf	D(20)
25(C)	30(C)			40(D)	inf	inf	Inf	35(D)	A(25)
	30(A)			40(D)	inf	inf	35(A)	35(D)	H(35)
	(Poids min mais les			40(D)	45(H)	55(H)		35(D)	I(35)
	sommets adjacents à			40(D)	45(H)	55(H)			E(40)
	B sont tous éliminés.				45(H)	55(H)			F(45)
	On reprend au poids					50(F)			G(50)
	immédiatement								
	Supérieur H)								

Le trajet C-A-H-F-G revient à un prix de 50 € et c'est le prix minimal du trajet.