Rappels sur les probabilités - Généralités

1 – Quelques définitions :

Nous allons étudier selon quelle mesure un fait provenant du hasard peut être prévisible.

1) Une expérience dont le résultat est le fruit du hasard est appelée une **expérience aléatoire**.

Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé **issue**.

Exemples : i) Lancer un dé à six faces.
ii) Tirer une carte dans un jeu de 32 cartes.
iii) Déterminer le groupe sanguin d'une personne prise au hasard dans une ville.

2) L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers**, généralement on le note Ω.

Exemples : i) $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$.
ii) $\Omega=\{co:7;8;9;10;V;D;R;As;pi:7;8;9;10;V;D;R;AS;tr:7;8;9;10;V;D;R;As;ca:7;8;9;10;V;D;R;As\}$ iii) $\Omega=\{O;A,B,AB\}$

3) Un **événement** est un résultat possible d'une expérience, c'est une partie de l'univers. Si cet événement n'a qu'un seul élément on dit qu'il est **élémentaire**.

Exemples : i) A = Obtenir une face paire. A = $\{2;4;6\}$ B = Obtenir 2. B = {2}.
ii) C = Obtenir un trèfle. C = {7 ;8 ;9 ;10 ;V ;D ;R ;As} D = Obtenir le roi de cœur. D = {R de cœur}
iii) E = La personne est du groupe A. E = {A}

Donc Ω est l'ensemble de tous les évènements élémentaires.

4) La **réunion** de deux événements se note A $\cup$ B (Se lit A ou B). Il est réalisé si au moins un des deux événements est réalisé.

Exemple : ii) F = Obtenir un cœur ou un roi = {co 7 ;8 ;9 ;10 ;V ;D ;R ;AS ;pi R ;tr R ;ca R}

5) L'**intersection** de deux événements se note A $\cap$ B (Se lit A et B). Il est réalisé si les deux événements sont réalisés en même temps.

Exemple : ii) G = Obtenir un cœur et un roi = {Roi de cœur}

6) L'événement **contraire** à A se note . $\overline{A}$.(non A). Il est réalisé quand A n'est pas réalisé.

Exemple : i) A = Obtenir un nombre pair. $\overline{A}$ = Obtenir un nombre impair.

7) Deux événement sont **disjoints** ou **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisé en même temps. On note $A \cap B = \varnothing$.

Exemple : iii) A = La personne est du groupe O.
B = La personne est du groupe B.

8) Le **nombre d'éléments** d'un ensemble A est noté Card A.

2 – Loi de probabilité sur un univers :

1) <u>Principe</u> : Chaque évènement élémentaire a des chances de se réaliser ; nous allons quantifier cette chance à l'aide d'un nombre réel positif ou nul appelé « probabilité que l'évènement se réalise ».

2) <u>Définition</u> : On définit une **loi de probabilité** sur l'univers $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ en associant à chacun des éléments x_i de Ω, un réel positif ou nul p_i, ces réels vérifiant la relation : $p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Si l'univers est fini, on présente les résultats dans un tableau comme ci-dessous, sinon, on peut donner une formule de calcul.

Evénements	x_i	x_1	x_2	…	x_n
Probabilités	p_i	p_1	p_2	…	p_n

<u>Exemple</u> : Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules rouges et 1 boule noire. On tire une boule dans l'urne et on s'intéresse à sa couleur.

Couleurs x_i	B	R	N
Probabilités p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3) <u>Probabilité sur un univers :</u>
Soit $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire. On considère la loi de probabilité sur Ω définie par :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

La **probabilité** associée à cette loi de probabilité est l'application P qui, à tout évènement A inclus dans Ω, associe le réel P(A), appelé probabilité de l'évènement A et définie par :
Si $A = \varnothing$ alors $P(\varnothing) = 0$ (On dit que l'évènement $\varnothing$ est impossible)

Si $A \neq \varnothing$, P(A) est la somme des réels p_i, pour tous les x_i appartenant à A, c'est-à-dire : $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$.

4) <u>Remarques</u> : P (Ω) = 1 (On dit Ω est l'évènement certain).
Pour tout évènement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$ (Très important)

5) <u>Modèle particulier</u> : L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité ; tous les p_i sont égaux. On a donc $p_i = \frac{1}{\text{nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{1}{\text{Card}\Omega}$. On parle aussi de loi équirépartie.

Concrètement, il y a équiprobabilité lorsque les objets sont équilibrés, il n'y a pas de trucage, on ne peut pas tricher, le tirage se fait bien au hasard.

6) <u>Dans une situation d'équiprobabilité :</u>
Soit A un évènement quelconque, P(A) = $\frac{\text{nbre d'élément de A}}{\text{nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables à A}}{\text{nbre de cas total}} = \frac{\text{CardA}}{\text{Card}\Omega}$.

<u>Exemple</u> : i) A = « Obtenir la face 5 ». P(A) $= \frac{1}{6}$. B = « obtenir une face paire ». P(B) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

7) <u>Théorème</u> : Pour tous événements A, B on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (formule du crible)

Pour tous événements A, B et C on a : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Pour tout $n \geq 1$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)$.

<u>Si A et B sont disjoints</u>, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

8) <u>Théorème</u> : Pour tout événement A, P($\overline{A}$) = 1 – P(A). (probabilité d'un événement contraire)