Dénombrements de base

1 – dénombrements :

1) Dénombrement des k-listes d'un ensemble E :

a) Définition : Soit E un ensemble non vide. On appelle ensemble des k-uplets (ou k-listes) de E le produit cartésien $E^k = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{k \text{ fois}}$. Un élément appartient à E^k s'il est de la forme $(x_1 ; x_2 ; ... ; x_k)$ où pour tout $1 \leq i \leq k$, $x_i \in E$.

Remarque : Attention, un k-uplet est ordonné. Par contre, deux x_i peuvent être égaux.
Une 2-uplet est un couple, un 3-uplet est un triplet.

b) Théorème : Soit E un ensemble fini non vide. Alors l'ensemble des k-uplets est un ensemble fini et $\text{Card}(E^k) = [\text{Card}(E)]^k$. Autrement dit, si $\text{Card}(E) = n$ alors $\text{Card}(E^k) = n^k$.

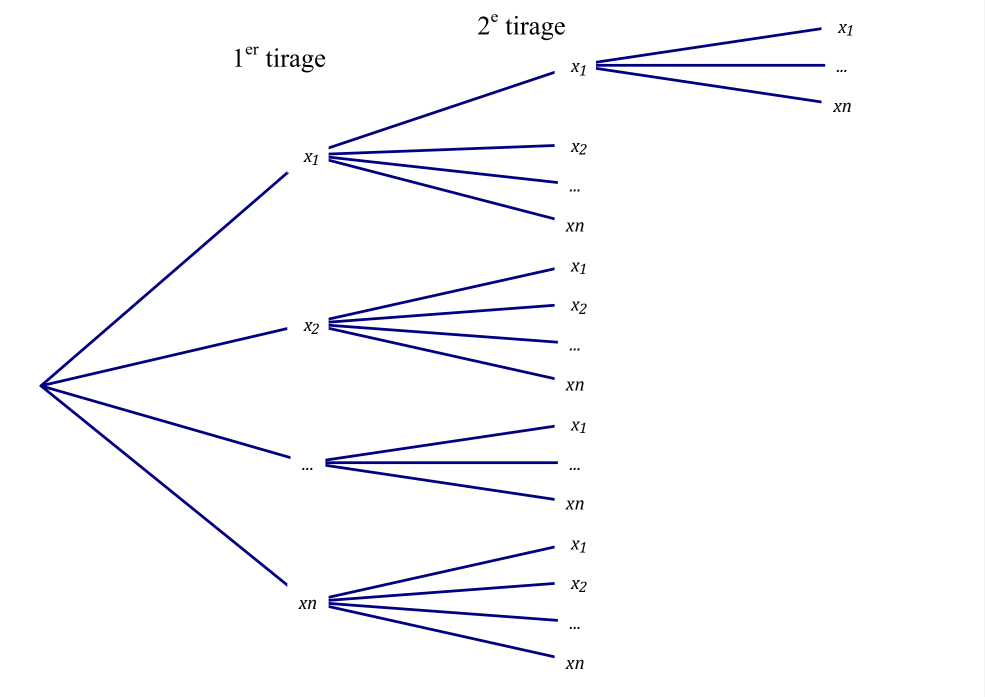
Remarque : La formule marche quels que soient les valeurs de n et de k.

c) Mise en pratique : Cette formule nous permet de calculer le nombre de résultats possibles d'une expérience constituée de k tirages successifs, avec répétition et ordre, d'éléments piochés dans un ensemble à n éléments.

Méthode : Comment dénombrer des k-listes ?

On identifie l'ensemble d'éléments dans lequel on pioche et son cardinal. Cela nous donne le nombre n. Puis on identifie combien d'éléments on doit piocher. Cela nous donne le nombre k. Le nombre de k-uplets différents est donné par n^k.
On peut aussi représenter la situation par un arbre de choix à k tirages dans lequel le nombre de branches n est le même à chaque tirage.

k^e tirage



n branches n branches n branches n branches

d) Application :
a) Combien peut-on former de mots de 5 lettres uniquement formés à partir des lettres A et B ?
b) Un code d'immeuble est constitué de quatre chiffres et deux lettres parmi X, Y et Z. Combien de codes différents peut-on former ?

Démonstration :
a) On pioche dans l'ensemble $E = \{A; B\}$. Card (E) = 2. On doit réaliser k = 5 tirages pour obtenir 5 lettres. Alors le nombre de mots différents est 2^5 . Nous pouvons former 32 mots différents.
b) Nous avons un premier ensemble de chiffres $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ (Card(E) = 10) et dans cet ensemble, on effectue k = 4 tirages. Ce qui nous donne 10^4 codes chiffres différents. Nous avons ensuite un deuxième ensemble $F = \{X; Y; Z\}$ (Card(F) = 3) dans lequel nous devons réaliser k' = 2 tirages. Ce qui nous donne 3^2 codes lettres différents. Un code final est un couple formé d'un code chiffre et d'un code lettre donc nous sommes en présence du produit cartésienne entre l'ensemble des codes chiffres et l'ensemble des codes lettres. Par principe multiplicatif, le nombre total de codes est donc $10^4 \times 3^2 = 90\,000$ codes pour cet immeuble.

2) Arrangements :

a) Nombre de k-uplets d'éléments distincts de E : Soit E un ensemble fini qui contient n éléments. Soit un entier $1 \le k \le n$. Un k-uplet d'éléments distincts de E est un k-uplet dans lequel aucun élément de E n'est répété deux fois. On l'appelle aussi un k-arrangement.
Le nombre de k-arrangements, se calcule avec le nombre $\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(k-1))}_{\text{k facteurs}}$.

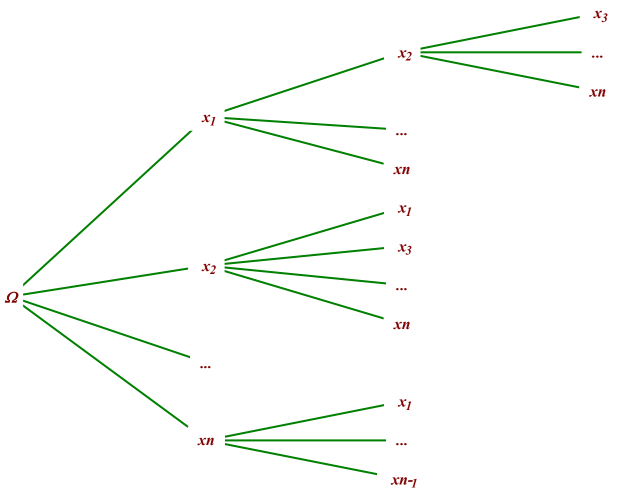
Remarque : La formule ne marche que si $1 \le k \le n$. Sinon il y a obligatoirement répétition. Donc le nombre d'éléments à piocher est inférieur ou égal au nombre d'éléments à disposition.

b) Mise en pratique : Cette formule nous permet de calculer le nombre de résultats possibles d'une expérience constituées de k tirages successifs, sans répétition et avec ordre, d'éléments piochés parmi un ensemble à n éléments.

Méthode : Comment dénombrer des k-arrangements ?

On identifie l'ensemble d'éléments dans lequel on pioche et son cardinal. Cela nous donne le nombre n. Puis on identifie combien d'éléments différents on doit piocher. Cela nous donne le nombre k. Il faut donc écrire une multiplication à partir du nombre n et constituée de k facteurs entiers successifs dégressifs.
On peut aussi représenter la situation par un arbre de choix à k tirages dans lequel, il y a une branche de moins à chaque tirage.

Tirage 1 Tirage 2 Tirage 3 jusqu'au tirage k



n branches n – 1 branches n – 2 branches jusqu'à n – (k + 1) branches

c) Application : Le 100 m des Jeux Olympiques se dispute entre 8 participants. Avant le début de la course, combien y a-t-il de podiums possibles ?

Démonstration : Nous avons un ensemble de 8 participants (n = 8) et un podium est contitué de 3 athlètes (k = 3). Aucun athlète ne peut être à deux places différentes à la fin et bien-sûr l'ordre compte. Nous devons donc calculer le nombre de 3-arrangements parmi 8 participants. $\underbrace{8 \times 7 \times 6}_{\text{3 facteurs}} = 336$. Il y a 336 podiums possibles à l'arrivée.

3) <u>Nombre de permutations de n éléments</u> :

a) <u>Définition</u> : Soit E un ensemble fini qui contient n éléments. On appelle permutation de n éléments tout n-uplet d'éléments distincts de E. Tous les éléments de E sont donc placés dans le n-uplet.
Le nombre de permutations de n éléments est calculé par $\underbrace{n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1}_{\text{n facteurs}}$ noté $n!$

<u>Remarque</u> : n ! s'appelle la factorielle de n. Elle se calcule en multipliant les entiers consécutifs de 1 jusqu'à n.
Le nombre de permutations correspond au nombre de n-arrangements.

b) <u>Mise en pratique</u> : Cette formule nous permet de calculer les nombre de placements possibles de n objets dans n places. Donc il n'y a pas répétition et l'ordre compte.

<u>Méthode</u> : Comment dénombrer des permutations de n éléments ?

On identifie l'ensemble d'éléments dans lequel on pioche et son cardinal. Cela nous donne le nombre n. Il faut donc écrire une multiplication à partir du nombre n et constituée de n facteurs entiers successifs dégressifs jusqu'à 1.
On peut aussi représenter la situation par un arbre de choix à n tirages dans lequel, il y a une branche de moins à chaque tirage.

c) <u>Application</u> : Cinq personnes doivent s'asseoir sur un banc rectangulaire à cinq places. Combien y a-t-il de placements possibles ?

<u>Démonstration</u> : Nous avons un ensemble de 5 personnes (n = 5) pour 5 places. Donc il faut calculer le nombre de permutations de 5 personnes. $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$. Il y a 120 placements possibles.

4) <u>Combinaisons</u> :

a) <u>Définition</u> : On appelle partie d'un ensemble E, un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent à E. (F est un sous-ensemble de E). On dit que F est inclus dans E et on écrit $F \subset E$.

b) <u>Nombre de parties à k éléments parmi n</u> : Soit E un ensemble fini qui contient n éléments. Soit un entier $0 \le k \le n$ Une partie de E qui contient k éléments s'appelle une combinaison de k éléments. Le nombre de combinaison de k élément de E est donné par le calcul $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ noté $\dbinom{n}{k}$.

<u>Remarque</u> : La formule ne marche que si $0 \le k \le n$ car la partie à k éléments est un sous-ensemble de E qui, lui, a n éléments.
Les nombres $\dbinom{n}{k}$ sont appelés les coefficients binomiaux.

c) <u>Mise en pratique</u> : Cette formule nous permet de calculer le nombre de résultats possibles d'une expérience constituée d'un tirage de k éléments piochés simultanément (sans répétition et sans ordre) parmi un ensemble à n éléments.

<u>Méthode</u> : Comment dénombrer des combinaisons k éléments parmi n ?

On identifie l'ensemble d'éléments dans lequel on pioche et son cardinal. Cela nous donne le nombre n. Ensuite, on identifie le nombre k d'objets à piocher simultanément. On applique la formule et le quotient se simplifie. Nous obtenons un entier à la fin.
On peut utiliser un arbre de choix à k tirages dans lequel, il y a une branche de moins à chaque tirage mais il faut faire attention à ne pas compter deux fois les chemins constitués des mêmes éléments.

d) <u>Application</u> : Dans une classe de 20 élèves, Combien de groupes de 10 élèves différents peut-on former ?

<u>Démonstration</u> : Nous avons un ensemble de 20 élèves (n = 20) dans lequel nous devons choisir simultanément 10 élèves (k = 10). Appliquons la formule et simplifions :

$$\binom{20}{10} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = \frac{20\times19\times\ldots\times11\times\cancel{10}\times\cancel{9}\times\ldots\times\cancel{2}\times\cancel{1}}{10\times9\times\ldots\times2\times1\times\cancel{10}\times\cancel{9}\times\ldots\times\cancel{2}\times\cancel{1}} = \frac{\cancel{20}\times19\times\overset{2}{\cancel{18}}\times17\times\overset{2}{\cancel{16}}\times\cancel{15}\times\overset{2}{\cancel{14}}\times13\times12\times11}{\cancel{10}\times\cancel{9}\times\cancel{8}\times\cancel{7}\times6\times\cancel{5}\times4\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}$$

$= \dfrac{19\times\cancel{2}\times 17\times 2\times 2\times 13\times \cancel{12}\times 11}{\cancel{6}\times\cancel{4}} = 19\times 17\times 2\times 2\times 13\times 11 = 184\,756$. Nous pouvons constituer 184 756 groupes de 10 différents.

2 – Étude des combinaisons :

1) Quelques résultats sur la factorielle :

a) Par convention, 0 ! = 1 et de manière évidente, 1 ! = 1.
b) Pour tout $n \geq 0$, $(n+1)! = (n+1)\times n!$.
Pour tout $n \geq 1$, $n! = n\times(n-1)!$

c) Pour tout $0 \leq k \leq n$, le nombre de k-arrangements est donné par $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

2) Cas particuliers : Pour tout $n \geq 0$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, pour tout $n \geq 1$, $\binom{n}{1} = n$ et pour tout $n \geq 2$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

3) Symétrie : Pour tout $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

4) Lien avec les arrangements : Pour tout $1 \leq k \leq n$, le nombre de combinaisons de k parmi n est égal au nombre de k-arrangements parmi n divisé par k !. $\binom{n}{k} = \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-(k-1))}{k!} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$.

5) Somme des coefficients binomiaux : Pour tout n, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

6) Relation et triangle de Pascal :

a) La relation de Pascal : Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

b) Le triangle de Pascal : Il s'agit d'une représentation en triangle dans un tableau qui permet de calculer les coefficients binomiaux à partir de la relation de Pascal. Voici le schéma pour une ligne n et une colonne k donnée :

$$\begin{array}{c} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ = \\ \binom{n}{k} \end{array}$$

On trouver la valeur du coefficient binomial situé à la ligne n et à la colonne k à partir de la somme des coefficients des colonnes k et k – 1 de la ligne précédente n – 1.

Méthode : Comment construire et utiliser le triangle de Pascal pour calculer $\binom{n}{k}$?

On construit un tableau à partir de 0 jusqu'à la valeur de n voulue en ligne et à partir de 0 jusqu'à la valeur de k souhaitée en colonne. La cellule (0 ; 0) comporte un 1 et la ligne n = 1 ne comporte que des 1. A partir de là, on peut utiliser la relation de Pascal en sachant qu'une ligne commence et finit toujours avec un coefficient 1.

Il suffit de se rendre à la ligne n et à la colonne k pour obtenir le coefficient $\binom{n}{k}$.

Application : Déterminer $\binom{5}{2}$ et $\binom{7}{5}$ à l'aide du triangle de Pascal.

Démonstration :

n k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$\binom{5}{2} = 10$ et $\binom{7}{5} = 21$.

3 – Carte mentale pour dénombrer : (basique mais applicable à la majorité des situations. Pourrait être complétée avec d'autres situations plus complexes de dénombrement)