Primitives et intégrales

1 – Primitives d'une fonction :

1) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une fonction F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I. Autrement dit, F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

2) Théorème (admis) : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

3) Propriétés :

a) Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f. Alors toutes les primitives de f définies sur I sont de la forme G : $x \mapsto F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. On dit que f admet une famille de primitives sur I.

b) Primitive unique : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Parmi les primitives de f définies sur I, il en existe une et une seule G prenant une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable c'est-à-dire telle que $G(x_0) = y_0$.

c) Propriété : Soient F et G deux primitives d'une même fonction f sur I. Si a et b sont deux réels de I alors :
$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

4) Primitive usuelles, calculs de primitives : On détermine des primitives par lecture inverse du tableau des dérivées (on adapte certaines formules) ou bien en dérivant des primitives données afin de retrouver la fonction étudiée.

a) Tableau des primitives de fonctions usuelles : Dans ce tableau, $C \in \mathbb{R}$.

f est définie par	Sur	Les primitives F de f sont définies par
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n \leq 0$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = e^{-x}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -e^{-x} + C$
$f(x) = e^{ax+b}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$ $]-\infty;0[$	$F(x) = \ln(x) + C$ $F(x) = \ln(-x) + C$
$f(x) = \ln(x)$	$]0;+\infty[$	$F(x) = x\ln(x) - x + C$

b) Opérations sur les primitives : Dans ce paragraphe, $C \in \mathbb{R}$.

Somme : Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I alors F + G est une primitive de f + g sur I.

Multiplication par un nombre : Si F est une primitive de f sur I alors $k \times F$ est une primitive de $k \times f$ sur I (k un réel).
(Tout nombre multiplié dans la fonction se retrouve multiplié pour une primitive)

Dans la suite, u est une fonction dérivable définie sur I telle que les calculs existent. Pour simplifier les notations, la variable x n'est pas écrite.

Puissance de fonction :	$f = u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + C$
Inverse d'un carré de fonction :	$f = \dfrac{u'}{u^2} \quad (u(x) \neq 0)$	$F = -\dfrac{1}{u} + C$
Racine carré :	$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}} \quad (u(x) > 0)$	$F = 2\sqrt{u} + C$
Exponentielle d'une fonction :	$f = u'e^u$	$F = e^u + C$
Logarithme d'une fonction :	$f = \dfrac{u'}{u} \quad (u(x) \neq 0)$	$F = \ln\lvert u\rvert + C = \begin{cases} \ln(u) + C \text{ si } u > 0 \\ \ln(-u) + C \text{ si } u < 0 \end{cases}$.

Remarque : Attention certaines fonctions admettent des primitives mais on ne peut pas donner leurs expressions explicites. Exemple : $x \mapsto e^{-x^2}$.

Méthode : Comment montrer qu'une fonction donnée est une primitive d'une fonction ?

Si la potentielle primitive est donnée alors il suffit de la dériver et de retrouver la fonction f.

Application : Montrer que la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$ sur $]0;+\infty[$.

Démonstration : La fonction f et dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit et somme de fonctions usuelles dérivables sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x > 0$, $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = f(x)$. F est une primitive de ln sur $]0;+\infty[$.

Méthode : Comme déterminer la famille des primitives d'une fonction à partir des opérations ?

Il faut déterminer la bonne formule à utiliser dans la feuille précédente. Par contre, la fonction dont on détermine ainsi les primitives doit bien être préparée pour faire apparaître la formule. Si besoin, on multiplie par des réels constants que l'on compense. Ensuite, on applique la formule.

Application : Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur les ensembles où elles existent et sont continues :

a) $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+1)^2$ b) $g(x) = (-6x-3)e^{-x^2-x+1}$ c) $h(x) = \dfrac{1+e^x}{x+e^x}$ sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :
a) On reconnait la formule puissance d'une fonction $f = u'u^n$. Vérifions si la formule et prête. On pose dans $\mathbb{R}$, $u(x) = 3x^2 - 2x + 1$ donc $u'(x) = 6x - 2$. La formule n'est pas prête. Alors préparons la fonction en multipliant par 2 et en compensant par $\dfrac{1}{2}$: Pour tout x, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times (3x-1)(3x^2-2x+1)^2 = \dfrac{1}{2}(6x-2)(3x^2-2x+1)^2 = \dfrac{1}{2}u'(x)u^2(x)$ donc pour tout x, $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}u^3(x) + C = \dfrac{1}{6}(3x^2-2x+1)^3 + C$. $(C \in \mathbb{R})$.
b) $g(x) = (-6x-3)e^{-x^2-x+1}$. On reconnait la formule exponentielle d'une fonction. On pose dans $\mathbb{R}$, $u(x) = -x^2 - x + 1$ alors $u'(x) = -2x - 1$. La formule n'est pas prête. Alors préparons la fonction en factorisant par 3 : Pour tout x, $g(x) = 3(-2x-1)e^{-x^2-x+1} = 3u'e^u$ donc pour tout x, $F(x) = 3e^{u(x)} + C = 3e^{-x^2-x+1} + C$. $(C \in \mathbb{R})$

c) $h(x)=\dfrac{1+e^x}{x+e^x}$ sur $]0;+\infty[$. On reconnait la formule du logarithme d'une fonction. On pose $u(x)=x+e^x$ alors $u'(x)=1+e^x$. Nous avons $h(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec u(x) > 0 sur $]0;+\infty[$. Donc pour tout x > 0, $F(x)=\ln u(x)+C=\ln\left(x+e^x\right)+C$.$(C\in\mathbb{R})$

Méthode : Comment déterminer la primitive unique d'une fonction à partir de conditions initiales ?
On recherche la famille de primitives associées à f. En remplaçant par les conditions initiales, nous calculons la constante C grâce à une équation.

Application : Déterminer la primitive la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+2x-e^x$ qui vaut 5 en 0.

Démonstration : Avec la formule x^n et e^x, pour tout $x, F(x)=x^3+x^2-e^x+C$ $(C\in\mathbb{R})$. F(0) = 5 alors $5=F(0)=0^3+0^2-e^0+C \Leftrightarrow 5=-1+C \Leftrightarrow C=6$. Donc pour tout x, $F(x)=x^3+x^2-e^x+6$ est la primitive de f qui vaut 5 en 0.

2 – INTÉGRALE ET PROPRIÉTÉS :

Rappel : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

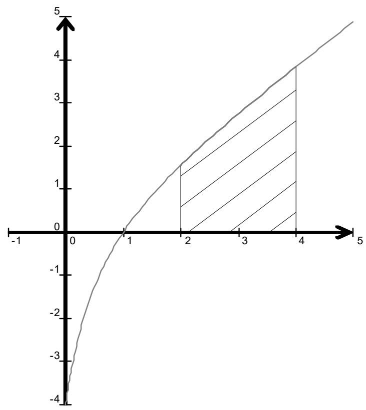
1) Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F l'une de ses primitives et a, b deux réels appartenant à I. On appelle intégrale de f entre a et b le nombre F (b) – F(a).

Remarque : Le choix de la primitive de f étant libre, nous prendrons dans la plupart des cas la primitive de f avec la constante C nulle.
Les réels a et b ne sont pas obligatoirement ordonnés pour calculer une intégrale.

2) Notation : Ce nombre est noté : $\int_a^b f(x)\,dx$ et se lit : intégrale de f entre a et b. On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Remarques : Ce symbole en forme de S traduit que l'intégrale est une Somme continue et dx traduit un déplacement infinitésimal (qui tend vers 0) de la variable d'intégration x entre a et b. (Voir la méthode des rectangles ci-dessous)
La variable d'intégration x est muette (c'est la même chose d'écrire $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$) car nous verrons qu'elle disparait lors du calcul de l'intégrale. Par contre, la variable d'intégration doit être différentes des variables des bornes ! Dans le cas où la fonction est à plusieurs variables, le dx sert donc à identifier que l'on intègre par rapport à x et les autres variables sont considérées comme constantes. D'autre part, le dx sert à délimiter la fonction à intégrer. Surtout ne pas l'oublier dans les calculs. Par exemple : $\int_0^2 2x^2+1\,dx \neq \int_0^2 2x^2dx+1$.

3) Aire sous la courbe : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] (a < b) et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire, en unités d'aires, du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation x = a et x = b.



4) <u>Liens entre intégrale et primitive d'une fonction continue</u> :

<u>Théorème fondamental</u> : Soit f une fonction continue sur un intervalle I Alors pour tous réles a et b de I, la fonction F_a définie sur [a ; b] par $F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule pour x = a.

<u>Remarques</u> : Ce théorème nous permet d'affirmer que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Pour tout x de [a ; b], F_a est dérivable et $F_a'(x)=f(x)$.

<u>Méthode</u> : Comment calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ?

Cette méthode sous-entend que f admette une primitive explicite, reconnaissable par une formule vue dans le chapitre précédent. Une fois une primitive obtenue, nous appliquons la différence $F(b)-F(a)$ dans cette ordre, quel que soient les valeurs de a et b.

<u>Application</u> : Calculer a) $\int_0^2 3x^2+2x+1dx$ et b) $\int_2^0 \frac{x}{x^2+1}dx$.

<u>Démonstration</u> :

a) Avec la primitive de x^n, $\int_0^2 3x^2+2x+1dx=\left[x^3+x^2+x\right]_0^2=2^3+2^2+2-\left(0^3+0^2+0\right)=8+4+2=14$.

b) On reconnait la formule $\frac{u'}{u}$. En posant $u(x)=x^2+1$, $u'(x)=2x$. Il faut préparer la formule : $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u}$.

Comme $u>0$, une primitive sera de la forme $\frac{1}{2}\ln u=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

Alors $\int_2^0 \frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_2^0=\frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(0^2+1\right)}_{\ln 1=0}-\frac{1}{2}\ln\left(2^2+1\right)=-\frac{1}{2}\ln 5$.

5) <u>Propriétés de l'intégrale</u> :

a) $\int_a^a f(t)\,dt=0$.

b) $\int_b^a f(t)\,dt=-\int_a^b f(t)\,dt$.

c) <u>Positivité de l'intégrale</u> : Si pour tout réel x de [a ; b], on a $f(x)\geq 0$ alors $\int_a^x f(t)\,dt\geq 0$.

<u>Remarque</u> : Attention, la réciproque est fausse : une intégrale positive ne provient pas forcement d'une fonction positive sur le domaine d'intégration.

Plus généralement, une intégrale conserve le signe contant d'une fonction. Si la fonction est négative sur [a ; b], alors l'intégrale entre a et b est négative.

Attention, les bornes a et b doivent être ordonnées dans l'ordre croissant : a < b.

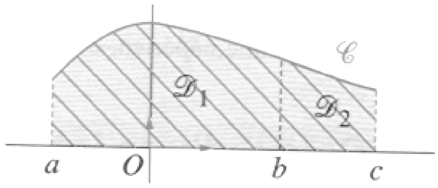
Attention, si la fonction change de signe sur [a ; b], on ne peut pas donner le signe de l'intégrale sans la calculer.

d) <u>Relation de Chasles</u> : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, pour tous les réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

<u>Remarque</u> : Il n'est pas obligatoire que b soit un élément de [a ; c] pour appliquer la relation de Chasles !

Par contre, dans le cas où f est positive et $a\leq b\leq c$, on a : $\mathscr{D}=\mathscr{D}_1+\mathscr{D}_2$



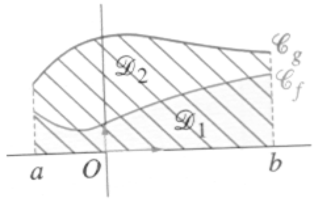
e) Linéarité : Si f et g sont continues sur l'intervalle [a ; b] et si k est un réel :

i) $\int_a^b k \times f(x)\,dx = k \times \int_a^b f(x)\,dx$.

ii) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

f) Ordre : Si f et g sont continues sur l'intervalle [a ; b] et si f (x) $\leq$ g(x) pour tout x de [a ; b] alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Remarque : Attention, les bornes a et b doivent être ordonnées dans l'ordre croissant : a < b.
Dans le cas où f et g sont positives on a : $\mathscr{D}_1 \leq \mathscr{D}_2$



Méthode : Comment intégrer une inégalité ?
Une fois l'inégalité sur la fonction établie sur un intervalle, on applique l'intégrale à chaque membre de l'inégalité en respectant l'ordre des inégalités. Ensuite, on calcule les intégrales qu'il est possible de calculer.

Application : On admet que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire que $0 \leq \int_0^4 \ln(1+x)\,dx \leq 8$.

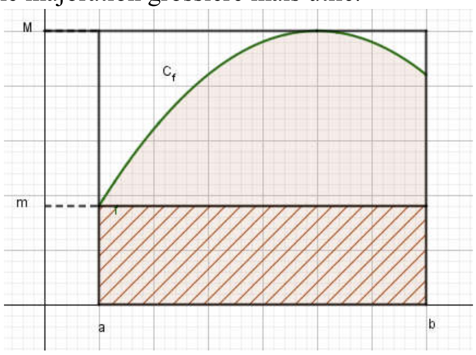
Démonstration : $\forall x \geq 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$. On intègre sur [0 ; 4]. L'ordre est conservé.

$$\int_0^4 0dx \leq \int_0^4 \ln(1+x)dx \leq \int_0^4 xdx \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^4 \ln(1+x)dx \leq \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^4 \ln(1+x)dx \leq 8 .$$

g) Inégalité de la moyenne : f est continue sur I ; m et M sont deux réels ; a et b sont deux réels de I tels que $a \leq b$.

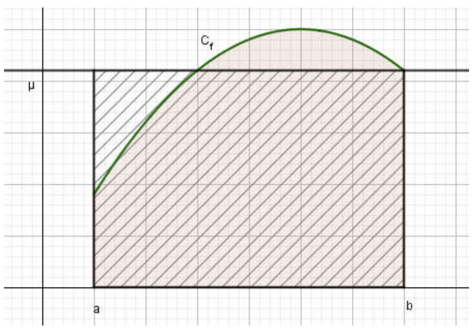
Si pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Remarque : En termes d'aires, elle veut dire que l'aire sous la courbe de la fonction f sur [a ; b] est comprise entre deux aires de rectangles de même largeur (b – a). Celui d'aire inférieure est de hauteur m (le minimum de f) et celui d'aire supérieure est de hauteur M (le maximum de f). C'est une majoration grossière mais utile.



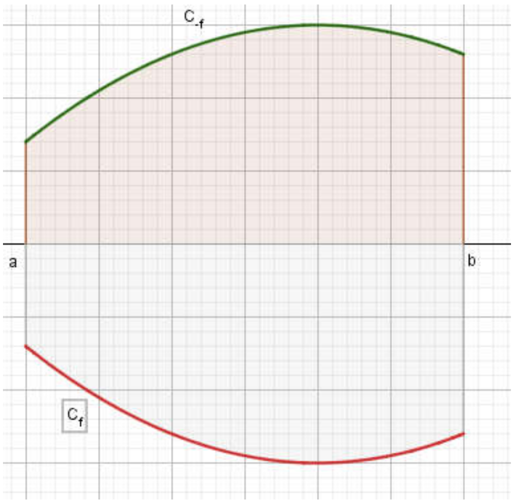
h) Valeur moyenne : La valeur moyenne d'une fonction f continue sur [a ; b] (a < b) est le nombre : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

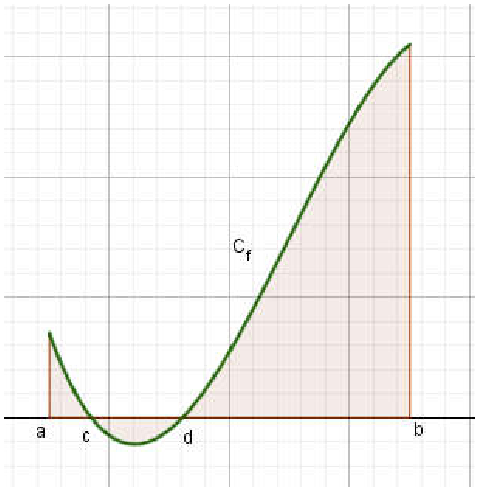
Remarque : Concrètement, la valeur moyenne s'interprète comme une moyenne d'un phénomène continu sur [a ; b]
En termes d'aires, elle veut dire que l'aire sous la courbe entre a et b est égale à l'aire d'un rectangle de même largeur (b – a) et de hauteur μ .



3 – Applications à d'autres calculs d'aires :

1) <u>Cas où f est négative</u> : Soit f une fonction négative sur [a ; b]. Alors l'aire située au-dessus de la courbe de f, sous l'axe des abscisses et entre les droites d'équation x = a et x = b est donnée par : $\int_a^b -f(x)\,dx$.





2) <u>Cas où f change de signe</u> : Soit f définie et qui change de signe sur [a ; b].
On découpe l'intervalle [a ; b] en intervalles sur lesquels la fonction f a un signe constant et on calcule l'intégrale de f, là où elle est positive et l'intégrale de – f là où elle est négative.

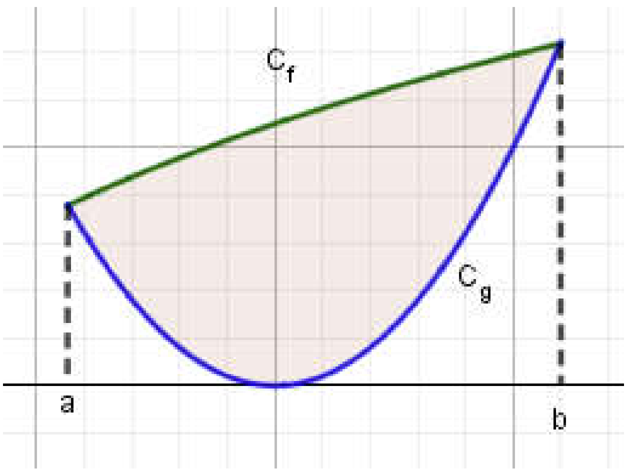
Autrement dit, Aire = $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Par exemple, Aire = $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d -f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$.

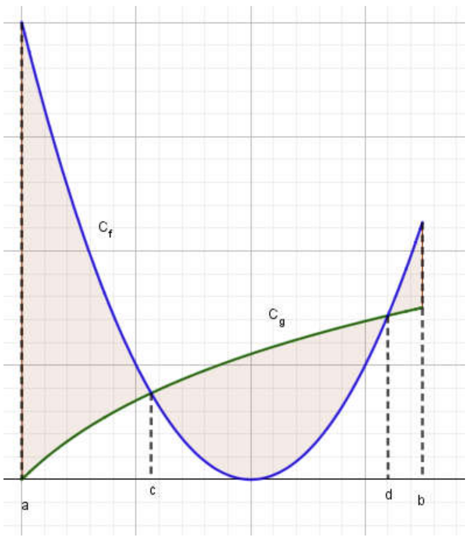
3) <u>Aire entre deux courbes</u> : Soient f et g deux fonctions définies sur [a ; b].

Alors l'aire située entre les deux courbes et limitée par les deux droites d'équations x = a et x = b est :

Si $f \geq g$ (la courbe de f est située au-dessus de la courbe de g) alors Aire = $\int_a^b f(x) - g(x)dx$.

Si $f \leq g$ (la courbe de f est située en dessous de la courbe de g) alors Aire = $\int_a^b g(x) - f(x)dx$.





Lorsque les courbes ont leurs positions mutuelles qui changent, on découpe l'intervalle [a ; b] selon leurs positions :

<u>Exemple</u> : Aire = $\int_a^c f(x) - g(x)dx + \int_c^d g(x) - f(x)dx + \int_d^b f(x) - g(x)dx$

<u>Méthode</u> : Comment calculer l'aire entre deux courbes ?

On étudie le positionnement relatif entre les deux courbes des fonctions en évaluant le signe de leur différence. Les abscisses des points d'intersections, s'ils existent, constituent les valeurs de découpage pour les intégrales des différences à calculer.

Application : 1) Étudier la position relative entre les courbes des fonctions f et g définies sur [-3 ; 7] par $f(x)=\frac{3}{4}x-1$ et $g(x)=-\frac{1}{4}x+1$.

2) En déduire l'aire entre les deux courbes sur [-3 ; 7].

Démonstration :

1) Sur [-3 ; 7], $f(x)-g(x)=\frac{3}{4}x-1-\left(-\frac{1}{4}x+1\right)=\frac{3}{4}x-1+\frac{1}{4}x-1=x-2$. Cette expression s'annule en 2. Voici son tableau de signes :

x	-3		2		7
x-2		$-$	0	$+$	

Sur [-3 ; 2], $f(x)-g(x)\leq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq g(x)$. La courbe de f est en dessous de la courbe de g.

Sur [2 ; 7], $f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$. La courbe de f est au-dessus de la courbe de g.

2) En tenant compte du positionnement des deux courbes,

$$A=\int_{-3}^{2}g(x)-f(x)\,dx+\int_{2}^{7}f(x)-g(x)\,dx=\int_{-3}^{2}-x+2\,dx+\int_{2}^{7}x-2\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-3}^{2}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{7}$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2^2+2\times 2-\left(-\frac{1}{2}\times(-3)^2+2\times(-3)\right)+\frac{1}{2}\times 7^2-2\times 7-\left(\frac{1}{2}\times 2^2-2\times 2\right)=-2+4+\frac{9}{2}+6+\frac{49}{2}-14-2+4=25\text{ u.a.}$$

4 – Intégration par partie :

1) Théorème : Soit u et v deux fonction dérivables sur [a ; b] admettant des dérivées u' et v' continues (c'est-à-dire que u et v sont de classe C^1 sur [a ; b]). Alors : $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,dt$

2) A quoi ça sert-il ? :

Calculer des intégrales dont la primitive n'est pas apparente.
Déterminer des nouvelles primitives.
Etablir des relations de récurrence.

c) Méthode : Comment calculer une intégrale par parties ?

L'intégration par partie n'a de sens que si la fonction de l'intégrale de départ peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions. Pour le choix de u et v', il faut anticiper les choses, car souvent les deux fonctions du produit peuvent jouer ce rôle. Le but est de bien choisir ces fonctions de façon à ce que l'intégrale créée par la formule soit calculable ou soit égale à un résultat déjà connu avant. Une piste aussi est que nous devons trouver une primitive de la fonction v' . Donc souvent, on choisit pour v' celle dont la primitive est calculable.

3) Application : Calculer $I=\int_0^1 te^t\,dt$ et $J=\int_1^e t\ln t\,dt$.

Démonstration :

Pour le choix de u et v', il faut anticiper les choses. Le but est de bien choisir ces fonctions de façon à ce que l'intégrale créée par la formule soit calculable ou égale à un résultat déjà connu avant.

Les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur [0 ; 1]. Ici le but est « de faire descendre le degré du polynôme » donc posons : $\begin{array}{l} u(t)=t \text{ et } v'(t)=e^t \\ u'(t)=1 \text{ et } v(t)=e^t \end{array}$. Si on avait choisit le contraire, on aurait $u'(t)v(t)=\frac{t^2}{2}e^t$ dans l'intégrale créée et il n'est pas facile de trouver une primitive de cette fonction.

Alors $I=\int_0^1 te^t\,dt=\left[te^t\right]_0^1-\underbrace{\int_0^1 e^t\,dt}_{\text{calculable}}=e-0-\left[e^t\right]_0^1=e-e+1=1$.

Pour J, les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{-+}$ donc en particulier sur $[1;e]$. Comme la primitive de la fonction ln n'est pas simple (même si on la connait), il vaut mieux la dériver. Posons $\begin{array}{l} u(t) = \ln t \text{ et } v'(t) = t \\ u'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } v(t) = \frac{t^2}{2} \end{array}$. Si on avait choisit le contraire, on aurait $u'(t)v(t) = (t\ln t - t)\times 1$ dans l'intégrale créée et le calcul de l'intégrale se complique (même s'il est faisable). Alors $J = \int_1^e t\ln t dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^e - \underbrace{\int_1^e \frac{t}{2}dt}_{\text{simple}} = \frac{e^2}{2}\ln e - 0 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

5 – Changement de variable :

1) Théorème : Soit f une fonction continue sur I et φ une fonction de classe C^1 sur [a ; b] telle que $\varphi([a;b]) \subset I$.

Alors $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$.

2) Remarque : Si le changement de variable n'est pas affine alors il vous sera donné.

3) Méthode : Comment appliquer un changement de variable pour calculer une intégrale ?
On pose la relation entre les deux variables du genre $u = \varphi(x)$ et il faut être capable de donner la relation inverse du genre $x = \varphi^{-1}(u)$. On remplace la variable x en fonction de u dans l'expression de la fonction de façon à ce qu'elle s'exprime en fonction de u seulement. Ensuite, lorsque la variable x prend les valeurs particulières aux bornes, on regarde quelles sont les valeurs que prend u. Cela nous donnera les bornes de la nouvelle intégrale. Pour finir, on dérive u en utilisant la notation « du » ce qui amène à dériver φ et d'ajouter un « dt » à la fin. Il faut remplacer tout ça dans l'intégrale. A la fin, nous devons obtenir une intégrale calculable.

Application : Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}}dx$ à l'aide du changement de variable $u = 1+e^t$.

Démonstration :
Posons φ la fonction définie par $\varphi(x) = 1+e^x$. Cette fonction est de classe C^1 sur [0 ; 1] . De plus, $\varphi(0) = 2 > 0$ et $\varphi(1) = 1+e > 0$ (valeurs aux bornes). Le calcul ln u est donc faisable et le changement de variable est autorisé.

De plus, $u = 1+e^x \Leftrightarrow e^x = u-1$ donc en dérivant $du = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u-1}$.

On a $\int_0^1 \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}}dx = \int_2^{1+e} \frac{\ln u}{1+\frac{1}{e^x}} \times \frac{du}{u-1} = \int_2^{1+e} \frac{\ln u}{1+\frac{1}{u-1}} \times \frac{du}{u-1} = \int_2^{1+e} \ln u \times \frac{u-1}{u} \times \frac{du}{u-1} = \int_2^{1+e} \frac{1}{u} \times \ln u du = \left[\frac{1}{2}(\ln u)^2\right]_2^{1+e}$

$= \frac{1}{2}(\ln(1+e))^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

6 – Fonction définie par une intégrale :

1) Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Les primitives de f sont de classe C^1 sur I.
Soit $a \in I$, la fonction F définie pour tout x de I par F (x) = $\int_a^x f(t)dt$ est une fonction de classe C^1 sur I et c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule pour x = a. Donc F '= f.

2) Théorème : Soit u et v deux fonctions définies sur I à valeurs dans J. On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ où f est une fonction continue sur J. Selon ces hypothèses, φ est une fonction définie sur I.
Si de plus, u et v sont dérivables sur I alors φ est une fonction dérivable sur I et pour tout x de I,
$\varphi'(x) = v'(x)\times f[v(x)] - u'(x)\times f[u(x)]$.
Remarque : Si on demande de montrer que φ est dérivable ou de classe C^n , ce sont u et v (et non pas f) qui transmettent cette propriété.

Méthode : Comment étudier une fonction définie par une intégrale ?

Si la fonction F est du type 1, il suffit de f soit continue sur I pour que F existe sur I et en tant que primitive de f, elle est de classe C^1 sur I. Sa dérivée est directement f. On étudie le signe de f et nous avons les variations de F.
Si la fonction φ est du type 2, à partir de l'ensemble de départ I, il faut déterminer un ensemble d'arrivée commun J pour les fonctions u et v. La fonction f doit être continue sur J pour que φ existe sur I. La classe des fonctions u et v sur I donne la classe de la fonction φ sur I. Pour dériver, on applique la formule donnée. et on étudie son signe sur I pour avoir les variations de φ.

Application : Étudier la fonction φ définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(x)=\int_1^{x^2}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

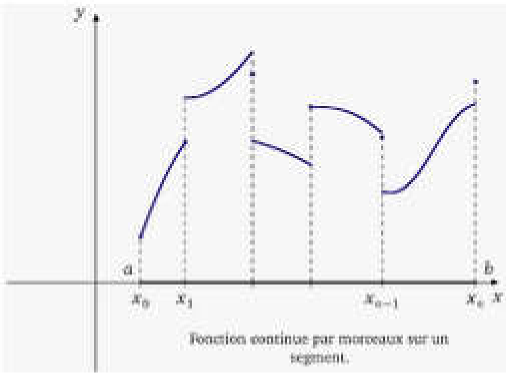
Démonstration : La fonction φ est du type 2.

Les fonctions $x\mapsto 1$ et $x\mapsto x^2$ sont de classe C^∞ de $I=[1;+\infty[$ vers $J=[1;+\infty[$. De plus, la fonction $f:t\mapsto\frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $J=[1;+\infty[$. Alors φ existe et est de classe C^∞ sur $I=[1;+\infty[$. En particulier, φ est dérivable sur $I=[1;+\infty[$ et pour tout $x\in[1;+\infty[$, $\varphi'(x)=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))=2x\times\frac{e^{-x^2}}{x^2}-0\times\frac{e^{-1}}{1}=\frac{2e^{-x^2}}{x}$.

Comme $x>0$ et $2e^{-x^2}>0$, alors pour tout $x\in[1;+\infty[$, $\varphi'(x)>0$. La fonction φ est donc croissante sur $I=[1;+\infty[$.

7 – Intégrale d'une fonction définie par morceaux :

1) Définition : : Une fonction f est continue par morceaux sur [a ; b] lorsque f est continue sur [a ; b] sauf en un nombre finis de points $x_1<x_2<...<x_n$ de [a ; b] en lesquels f a un limite finie à droite et à gauche. On note f_i la restriction de f à $]x_i;x_{i+1}[$, $x_0=a$ et $x_{n+1}=b$.



Fonction continue par morceaux sur un segment.

2) Théorème : Pour tout $i\in[\![0;n]\!]$, on note $\hat{f}_i$ le prolongement par continuité de f_i sur $[x_i;x_{i+1}]$.

Alors l'intégrale de f sur [a ; b] et $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\hat{f}_i(x)dx$.

3) Propriété : L'intégrale des fonctions continues par morceaux conserve la linéarité, la relation de Chasles, la positivité et l'inégalité triangulaire.