Continuité, dérivabilité, classes. Études locales et globales des fonctions

1 – Continuité d'une fonction :

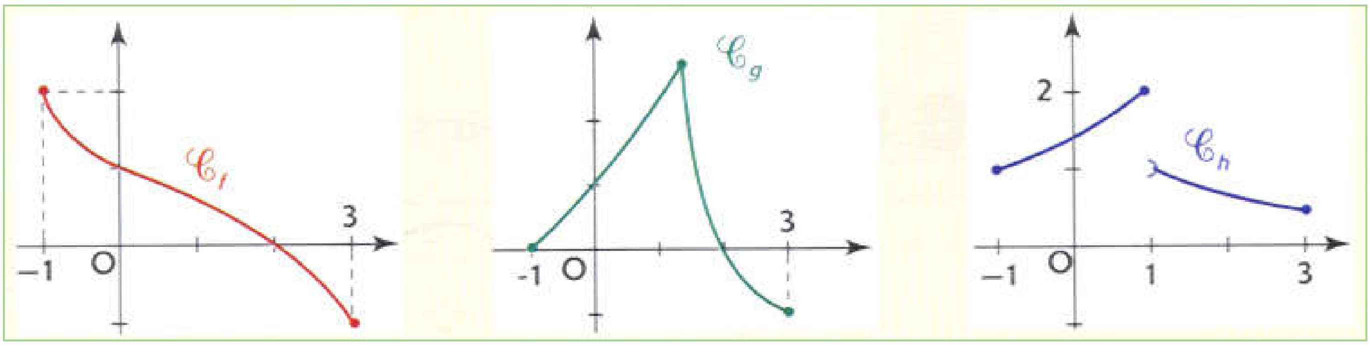
Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition :

1) Continuité en un point : Soit a un élément de I. On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarque importante : Il est inutile de chercher une continuité en une valeur interdite. La valeur a est nécessairement dans l'ensemble de définition.

2) Continuité sur un intervalle : On dit que f est continue sur l'intervalle I si et seulement si elle est continue pour tout réel de I.

3) Approche graphique : Lorsque la courbe de f se trace d'un trait continu sur I , c'est-à-dire « sans lever le crayon », on dit alors que la fonction f est **continue** sur l'intervalle I. De même, une flèche de variation d'une fonction sur un intervalle I dans un tableau de variation, suggère que la fonction est continue sur I.



La fonction est continue sur [-1 ; 3]

La fonction est continue sur [-1 ; 1,5]
La fonction est continue sur [1,5 ; 3]
La fonction est continue en 1,5 donc elle est aussi continue sur [-1 ; 3].

La fonction est continue sur [-1 ; 1]
La fonction est continue sur]1 ; 3]
La fonction n'est pas continue en 1
Donc elle n'est pas continue sur [-1 ; 3].

4) Exemples de fonctions continues :

Les fonctions usuelles : affine, carré, cube, racine carrée, valeur absolue, trinômes et exponentielle sont continues sur leurs ensembles de définition.
Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

5) Opérations : Une fonction construite par opérations ou par composition à partir de fonctions continues, est continue sur les intervalles qui forment son ensemble de définition.

6) Méthode 1 : Comment montrer qu'une fonction est continue en un réel a de son ensemble de définition.

Tout d'abord, nous devons calculer la limite de f en a, vérifier qu'elle existe et qu'elle est égale à un nombre réel. Si la fonction est définie par morceaux par rapport à a, on peut être amené à calculer la limite à droite et à gauche de f en a. Si ces limites sont égales, alors la limite de f en a existe et vaut la valeur commune. Ensuite, on compare la limite obtenue avec l'image f(a). La fonction est continue en a si et seulement les valeurs sont égales.

Méthode 2 : Comment montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle inclus dans son ensemble de définition.

On peut prouver la continuité globale d'une fonction par opérations et compositions de fonctions usuelles continues. Il faut clairement faire apparaitre chacune des fonctions qui interviennent dans le calcul et en cas de composition de fonctions, bien faire apparaitre le lien entre l'ensemble d'arrivée de la première fonction et l'ensemble de définition de la deuxième fonction.

Méthode 3 : Comment étudier la continuité d'une fonction sur son ensemble de définition ?

Tout d'abord, on regarde si la fonction possède dans son ensemble de définition, des valeurs où il pourrait y avoir un problème de continuité (valeurs découpant une fonction est définie par morceaux par exemple, bornes finies incluses dans l'ensemble de définition). On rédige d'abord la continuité globale sur des intervalles où sont exclues ces valeurs puis on fait une étude de continuité locale en ces valeurs. Selon les résultats, on conclut à la continuité ou pas.

Applications :

a) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Etudier la continuité en a = 2 et sur $\mathbb{R}$.

b) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Etudier la continuité en a = 0 et sur $\mathbb{R}$.

c) Établir la continuité globale de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.

Démonstration :

a) La fonction f est continue sur $]-\infty;2]$ comme fonction trinôme ; la fonction f est continue sur $]2;+\infty[$ comme fonction affine.

Etude en 2 : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \leq 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \leq 2}} x^2 - 1 = 3$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} 5 - x = 3$; f(2) = 3 donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Alors f est continue en 2 et donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ comme fonction carrée ; La fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ comme fonction inverse.

Etude en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} x^2 = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$. La limite à gauche est différente de la limite à droite donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ n'existe pas. Alors g n'est pas continue en 0 et g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

c) Comme c'est une fonction polynomiale, la fonction $x \mapsto \left(1 + x^2\right)$ est continue de $\mathbb{R}$ vers $\boxed{\mathbb{R}_+}$ (car $1 + x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$) et la fonction usuelle $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}_+}$ donc par composition, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

7) Le prolongement par continuité :

a) Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage D du réel a mais pas en a $(a \notin D)$. Si la limite de f en a existe alors en posant $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, nous pouvons définir une nouvelle fonction $\hat{f}$ définie sur $D \cup \{a\}$ telle que : $\begin{cases} \hat{f}(x) = f(x) & \text{si } x \in D \\ \hat{f}(x) = \ell & \text{si } x = a \end{cases}$.

Cette fonction $\hat{f}$ s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

b) Remarques : Il est important de comprendre que le prolongement par continuité d'une fonction f consiste à créer une nouvelle fonction $\hat{f}$ qui existe en une valeur où f n'existe pas. Une fois montré son existence, dans certains exercices, l'énoncé peut nous signaler que le prolongement s'appelle encore f. Mais on réutilise le même nom seulement si l'énoncé nous le dit.

c) Méthode : Comment montrer qu'une fonction se prolonge par continuité :

Le réel a se situe à une borne ouverte de l'ensemble de définition. On calcule $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Si cette limite existe et vaut le réel ℓ alors on dit qu'il existe un prolongement pour f en a et on le définit telle que la définition nous le dit. Si la limite n'existe pas ou est infini, le prolongement n'existe pas en a.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)$. Admet-elle un prolongement par continuité ?

Démonstration : Si c'est le cas, c'est en 0 que cela se passe. Selon le cours sur la fonction ln, nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)=0$ (croissances comparées) donc f se prolonge par continuité en 0.

On pose une nouvelle fonction $\hat{f}$ définie sur $[0;+\infty[$ (notez bien le crochet) telle que : $\begin{cases}\hat{f}(x)=x\ln(x) \text{ si } x\in\,]0;+\infty[\\ \hat{f}(0)=0\end{cases}$. C'est le prolongement de f en 0.

2 – DERIVABILITE D'UNE FONCTION :

1) Définition :

Soit f définie sur I ; a et a + h sont des réels de I (h $\neq$ 0). Le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé le taux de variation de f en a.

Autre notation : Soit x un réel de I différent de a. Le nombre $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé le taux de variation de f en a.

On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ou $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre réel.

Cette limite réelle est appelée le nombre dérivée de f en a et notée f '(a).

Méthode : Comment étudier la dérivabilité en un point d'une fonction ?

On repère l'abscisse où ça se passe, c'est le nombre a. Nous pouvons alors calculer f(a). Ensuite, on prend un réel h non nul tel que a + h reste dans l'ensemble de définition et nous calculons f(a + h) en fonction de h. Ensuite, on forme le calcul $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que l'on cherche à simplifier. Quand c'est fait, on fait tendre h vers 0 et si la limite obtenue est un nombre réel unique alors la fonction est dérivable en a et $f'(a)$ est le résultat de cette limite, sinon elle n'est pas dérivable en a.

Ou bien :

On repère l'abscisse où ça se passe, c'est le nombre a. Nous pouvons alors calculer f(a). Ensuite, on prend un réel x quelconque dans l'ensemble de définition, différent de a et nous calculons f(x) en fonction de x. Ensuite, on forme le calcul $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ que l'on cherche à simplifier. Quand c'est fait, on fait tendre x vers a et si la limite obtenue est un nombre réel unique alors la fonction est dérivable en a et $f'(a)$ est le résultat de cette limite, sinon elle n'est pas dérivable en a.

Application : Etudier la dérivabilité en 1 de la fonction définie par $f(x)=3x^2-2x$.

Démonstration : a = 1. Alors $f(1)=3\times 1^2-2\times 1=3-2=1$.

Soit $h\neq 0$ dans $\mathbb{R}$, $f(1+h)=3(1+h)^2-2(1+h)=3(1+2h+h^2)-2-2h=3+6h+3h^2-2-2h=3h^2+4h+1$.

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{3h^2+4h+1-1}{h}=\dfrac{3h^2+4h}{h}=\dfrac{h(3h+4)}{h}=3h+4$. Alors $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3h+4=4$.

La fonction f est dérivable en 1 et $f'(1)=4$.

Ou bien

Soit $x\neq 1$, dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}$. Factorisons $3x^2-2x-1$. D'abord posons $3x^2-2x-1=0$ alors

$\Delta=(-2)^2-4\times 3\times(-1)=4+12=16>0$. Deux solutions : $x_1=\dfrac{2+\sqrt{16}}{6}=\dfrac{2+4}{6}=1$ et $x_1=\dfrac{2-\sqrt{16}}{6}=\dfrac{2-4}{6}=-\dfrac{1}{3}$.

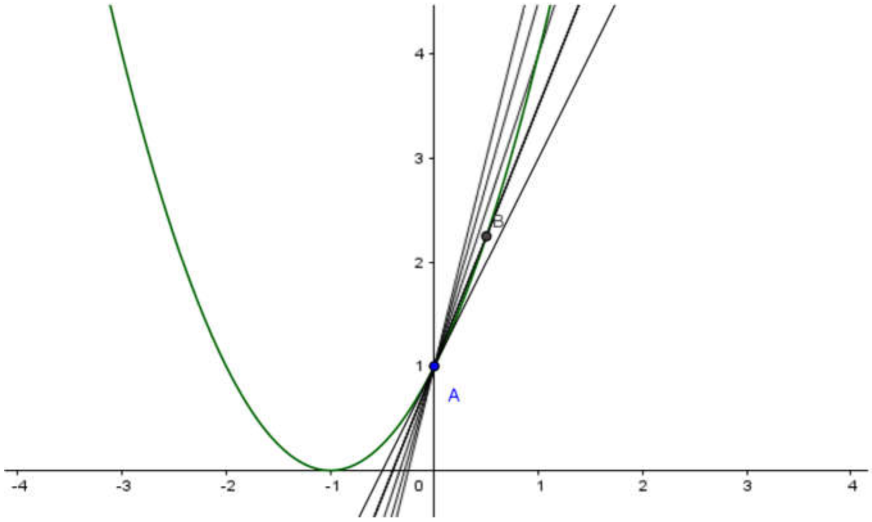
Nous obtenons $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x-1}=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=3x+1$. Alors $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}3x+1=4$.

Nous aboutissons à la même conclusion.

Remarque : La limite d'un taux de variation est une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ » qu'il faut débloquer.

2) Equation de la tangente :

a) Rappel : La tangente à une courbe en un point est la droite qui approche le mieux la courbe en ce point. On remarque que la tangente en un point A est la position limite des sécantes formées par un point de la courbe qui se rapproche du point A.



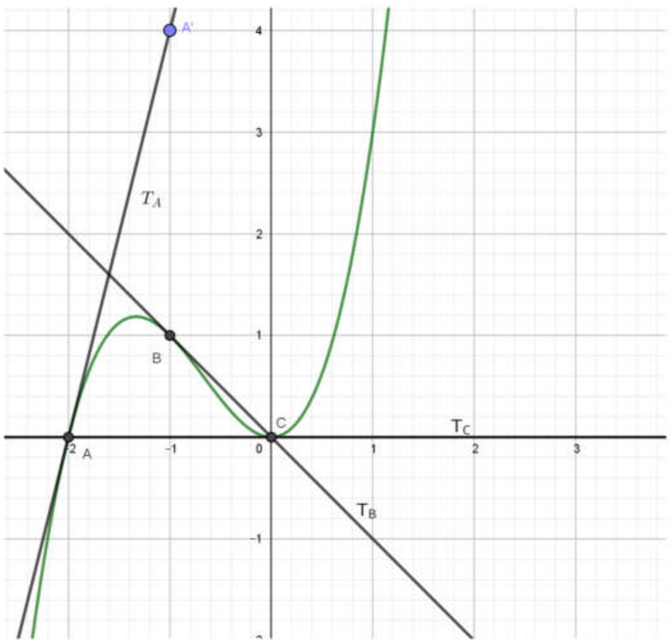
b) Propriété : Si f est dérivable en a alors la courbe de f admet une tangente au point A (a ; f (a)) et le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.
L'équation de la tangente à C_f en (a ; f(a)), a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Remarque : Nous verrons un exemple de calcul d'équation de la tangente un peu plus tard dans la leçon.

c) Méthode : Comment déterminer graphiquement un nombre dérivé ?

Un nombre dérivé s'interprète comme un coefficient directeur d'une tangente, il suffit donc de déterminer ce coefficient directeur, avec deux points A et B de la tangente, grâce à la formule $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ou bien en comptant le décalage de carreaux qui forme cette formule.

Application : Voici la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les droites T_A, T_B et T_C sont les tangentes à la courbe respectivement en A, B et C. A l'aide du graphique, déterminer les valeurs de $f'(-2)$, $f'(-1)$ et $f'(0)$.



Démonstration : Par définition, $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse -2 c'est-à-dire T_A. En utilisant $A(-2;0)$ et $A'(-1;4)$, nous obtenons

$$f'(-2) = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{4-0}{-1+2} = 4.$$

Par définition, $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point B d'abscisse -1 c'est-à-dire T_B. En utilisant, le décalage de carreaux à partir de B jusqu'à C, nous avons

$$f'(-1) = \frac{-1}{1} = -1.$$

Par définition, $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point C d'abscisse 0 c'est-à-dire T_C. Comme cette droite est horizontale, $f'(0) = 0$.

3) Lien entre continuité et dérivabilité :

a) Théorème : Si une fonction est dérivable en a alors elle est continue en a.

b) Contre-exemple : La réciproque est fausse. Avec la fonction valeur absolue pour a = 0. Elle est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

Démonstration : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0| = f(0)$ donc elle est continue en 0.

$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 \text{ si } h > 0 \\ -1 \text{ si } h < 0 \end{cases}$ donc $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 1 = 1$ et $\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -1 = -1$.

La limite à gauche est différente de la limite à droite donc il n'y a pas de limite en 0. La fonction n'est pas dérivable en 0.

4) Dérivabilité globale :

a) Définition : Soit I un intervalle de l'ensemble de définition de f.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable pour tout x de I.

b) Méthode : Comment justifier qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle inclus dans son ensemble de définition ?

Comme pour la continuité, on peut prouver la dérivabilité globale d'une fonction par opérations et compositions de fonctions usuelles dérivables. Il faut clairement faire apparaitre chacune des fonctions qui interviennent dans le calcul et en cas de composition de fonctions, bien faire apparaitre le lien entre l'ensemble d'arrivée de la première fonction et l'ensemble de dérivabilité de la deuxième fonction.

Application : Étudier la dérivabilité globale de la fonction définie sur par $x \mapsto \sqrt{2x^2+4}$.

Démonstration : La fonction $x \mapsto 2x^2+4$ est continue sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$. Or la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{2x^2+4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons ensuite calculer la fonction dérivée en utilisant la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

2 – CLASSES DE FONCTIONS :

1) Définition : Soit f définie sur un ensemble I et $a \in I$. Soit $n \geq 1$.

i) On dit que f est de classe C^n en a si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivables en } a \\ \text{et la dérivée } n-\text{ième de } f \text{ est continue en } a \end{cases}$.

ii) On dit que f est de classe C^n sur I si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivables sur } I \\ \text{et la dérivée } n-\text{ième de } f \text{ est continue sur } I \end{cases}$.

iii) On dit que f est de classe C^∞ en a (ou sur I) si et seulement si f est indéfiniment dérivable en a (ou sur I).

Attention : être « de classe C^n » ne veut pas dire être « n fois dérivable ». C'est une erreur trop courante ! Il y a l'étude de la continuité de la dérivée n-ième à faire en plus.

Remarque : Si f est continue en a (ou sur I), on dit qu'elle est de classe C^0 en a (ou sur I).

2) Propriétés : Soit $n \geq 1$, I un ensemble et $a \in I$. Nous avons la suite d'implications suivante qui fonctionne sur tout un ensemble I ou bien pour un réel $a \in I$:

f est de classe $C^\infty \Rightarrow$ f est de classe $C^{n+1} \Rightarrow$ f est de classe $C^n \Rightarrow$ f est de classe $C^1 \Rightarrow$ f est dérivable $\Rightarrow$ f est continue

Remarque : Autrement dit, si f est d'une classe plus grande en a (ou sur I), alors f est de classe plus petite en a (ou sur I).
Donc dans certains sujets de concours, si plusieurs questions portent sur la continuité, la dérivabilité et les classes, il est quelque fois judicieux de montrer dès la première question que la fonction appartient à une classe la plus grande possible et de se servir de la propriété précédente pour justifier que la fonction fait partie de toutes les classes inférieures qui sont demandées par la suite. Bien-sûr, il faut discerner quand l'étude est locale (en a) ou globale (sur I).

3) Propriétés : Les fonctions usuelles : affine, carré, cube, racine carrée, valeur absolue, trinômes, ln et exponentielle sont C^{∞} sur leurs ensembles de définition.
Les fonctions polynômes sont C^{∞} sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont C^{∞} sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
Une fonction construite par opérations ou par composition à partir de fonctions C^{∞} , est C^{∞} sur les intervalles qui forment son ensemble de définition.

Méthode : Comment justifier qu'une fonction f est C^{n} sur un intervalle inclus dans son ensemble de définition ?

Comme pour la continuité et la dérivabilité, on peut prouver l'appartenance à la classe C^{n} de manière globale d'une fonction par opérations et compositions de fonctions usuelles C^{n}. Il faut clairement faire apparaitre chacune des fonctions qui interviennent dans le calcul et en cas de composition de fonctions, bien faire apparaitre le lien entre l'ensemble d'arrivée de la première fonction et l'ensemble où la fonction est C^{n} de la deuxième fonction.

Application : La fonction f de $\mathbb{R}^{+}$ vers $\mathbb{R}$ est définie par $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Démontrer que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^{+*}$?
b) Est-elle de classe C^{1} sur $\mathbb{R}^{+}$?

Démonstration :
a) Cette fonction est définie par morceaux sur $\mathbb{R}_{+} = [0;+\infty[$. Elle existe en 0 mais risque de poser problème en 0.
Tout d'abord, nous faisons une étude globale en excluant ce 0, donc sur $\mathbb{R}_{+}^{*} =]0;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est usuelle de classe C^{∞} de $\mathbb{R}_{+}^{*} =]0;+\infty[$ vers $\boxed{]-\infty;0[}$. Or la fonction $t \mapsto e^{t}$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\boxed{]-\infty;0[}$. Alors par composition, f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$.
b) Dans cette question, le 0 est réintégré dans l'étude vu qu'on travaille sur $\mathbb{R}_{+} = [0;+\infty[$. Travaillons d'abord sur $\mathbb{R}_{+}^{*} =]0;+\infty[$ puis en 0.
Comme f est C^{∞} sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ alors f est C^{1} sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $f'(x) = \frac{1}{x^{2}} e^{-\frac{1}{x}}$ avec la formule, $\left(e^{u}\right)' = u'e^{u}$.
Étude en 0 : Pour respecter la définition, nous devons étudier la dérivabilité de f en 0 et si c'est le cas, la continuité de cette dérivée en 0.
Soit $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}-0}{x} = -\left(-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} Xe^{X} = 0$ donc par composition,
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{X\to -\infty} -Xe^{X} = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Comme $\lim\limits_{X\to -\infty} X^{2}e^{X} = 0$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{2}} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{1}{x}\right)^{2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} X^{2}e^{X} = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en 0.
Alors f est de classe C^{1} en 0.
En conclusion, f est de classe C^{1} sur $\mathbb{R}^{+}$.

4 – Quelques théorèmes importants :

1) Théorème de la bijection : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I vers son image f(I).

2) Théorème des valeurs intermédiaires :
a) Théorème : Si f est continue sur un intervalle I et alors pour tout réel k compris dans l'intervalle image f(I), l'équation f (x) = k admet au moins une solution dans I (c'est-à-dire, il existe c dans I tel que f (c) = k).

b) Corollaire : Soit $a < b$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ alors pour toute valeur k comprise entre f (a) et f (b), l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[a ; b]$.

Remarque : On peut étendre ce résultat sur tout intervalle, quelles que soient les bornes (finies ou infinies). Dans ce cas, nous serons amenés à calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle.

3) Théorème des accroissements finis :

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$ alors pour tout $(x, y) \in I^2$,

$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Remarque : Ce théorème est très utilisé dans le cadre d'étude des suites récurrentes, pour établir leurs convergences par exemple. Dans ce cas, on applique le théorème des accroissements finis avec $x = u_n$ pour tout n et y = le point fixe de f. (voir définition ci-dessous).

4) Théorème du point fixe :

a) Définition : Soit f définie sur un ensemble I. On appelle point fixe de f, tout réel de I solution de l'équation $f(x) = x$.

b) Théorème : Soit (u_n) une suite récurrente créée avec la fonction de transfert f définie sur un ensemble I stable par f.

Si $(u_n)_n$ est convergente dans I et f est continue sur I alors la limite de $(u_n)_n$ est un point fixe de f dans I.