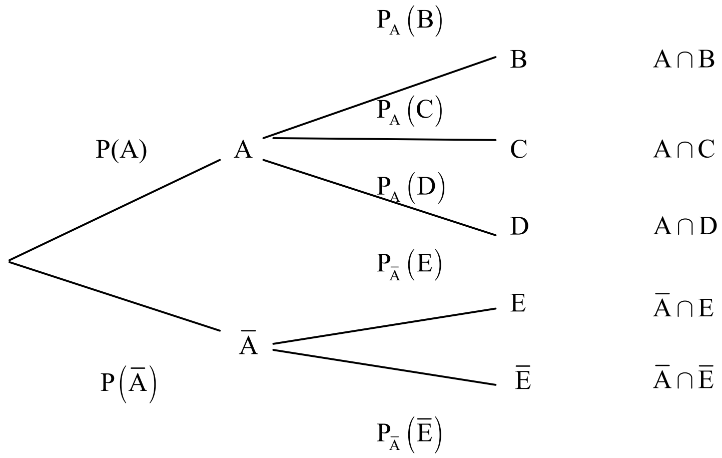
Probabilités conditionnelles

1 – Arbre pondéré :

Pour modéliser certaines expériences aléatoires successives, on peut utiliser un arbre pondéré.
<u>Règle de construction 1</u> : Les branches provenant d'un même nœud représentent toutes les issues d'une seule expérience aléatoire. On écrit la probabilité de réalisation de l'issue au dessus de la branche.
Ensuite chaque issue peut être le départ d'un nouveau nœud pour une expérience aléatoire suivante.
<u>Règle de construction 2</u> : règle des nœuds : La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
<u>Règle d'utilisation 1</u> : Dès la deuxième expérience aléatoire, les probabilités affectées seront des probabilités conditionnelles sachant l'évènement précédent.
<u>Règle d'utilisation 2</u> : Le résultat d'un chemin est l'évènement égal à l'intersection des évènements qui constituent le chemin.
<u>Règle d'utilisation 3</u> : La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.



$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

2 – Probabilité conditionnelle :

1) <u>Définition</u> : Lorsque la probabilité de réalisation d'un évènement B dépend d'un autre évènement A déjà réalisé (c'est-à-dire tel que p(A) $\neq 0$), on peut définir la probabilité conditionnelle que B se réalise sachant que A s'est réalisé :

La probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $p_A(B)$ ou $p(B/A)$ et on a : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

<u>Remarque</u> : on a $p(A\cap B)=p_A(B)\times p(A)$

Si $p(B)\neq 0$, on a $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ et donc $p(A\cap B)=p_A(B)\times p(A)=p_B(A)\times p(B)$

$p_A(A)=1$ et si A et B sont disjoints, $p_A(B)=0$

2) <u>Indépendance de deux évènements</u> :

a) <u>Définition</u> : Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si on a $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

A ce moment-là, $p_A(B)=p(B)$ et $p_B(A)=p(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B ne dépend pas de A et la réalisation de A ne dépend pas de B.

b) <u>Théorème</u> : Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants. Cela se généralise à tous les complémentaires.

c) <u>Remarques importantes</u> :
Indépendant $\neq$ disjoint
Ne pas confondre des <u>évènements indépendants</u> et des <u>expériences indépendantes</u> : deux expériences indépendantes sont des expériences dont les issues de la première n'influencent pas l'expérience suivante et bien évidemment les issues directes des deux expériences sont indépendantes. Mais attention, il est possible de créer deux évènements (plus élaborés) dépendants, à partir d'expériences indépendantes.

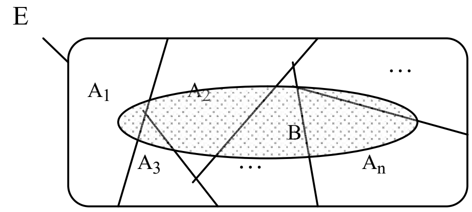
3 – Trois formules essentielles :

1) La formule de Bayes :

a) Formule : Si A et B sont deux évènements de probabilités nulles, $p_B(A) = \dfrac{p(A)p_A(B)}{p(B)}$.

b) Intérêt : Cette formule permet de prédire le passé ou le futur. Plus précisément, elle permet d'évaluer la probabilité conditionnelle inverse que celle suggérée par le problème de départ.

2) La formule des probabilités totales :



a) Définition : Considérons $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements de E, l'univers associé à une expérience aléatoire. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de E s'ils sont non vides, s'ils sont deux à deux disjoints et si $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

Cas particulier : A et $\overline{A}$ forment une partition de E.

Remarques :
Comprendre une partition comme un puzzle formant l'univers.
On dit aussi que $A_1, A_2, ..., A_n$ forme un système complet d'évènements.

b) Théorème – Formule des probabilités totales : Les évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de l'univers E. Alors la probabilité d'un évènement quelconque B est donné par : $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.

c'est-à-dire si $p(A_i) \neq 0$ pour tout i : $p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + ... + p_{A_n}(B) \times p(A_n) = \sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(B) \times p(A_i)$.

Remarque :
Cette formule est essentielle. Elle se retrouve pratiquement dans tous les sujets.
La partition peut être constituée d'une infinité d'évènements. Dans ce cas, dans la formule, la somme est infinie et une convergence de série est à étudier au préalable.

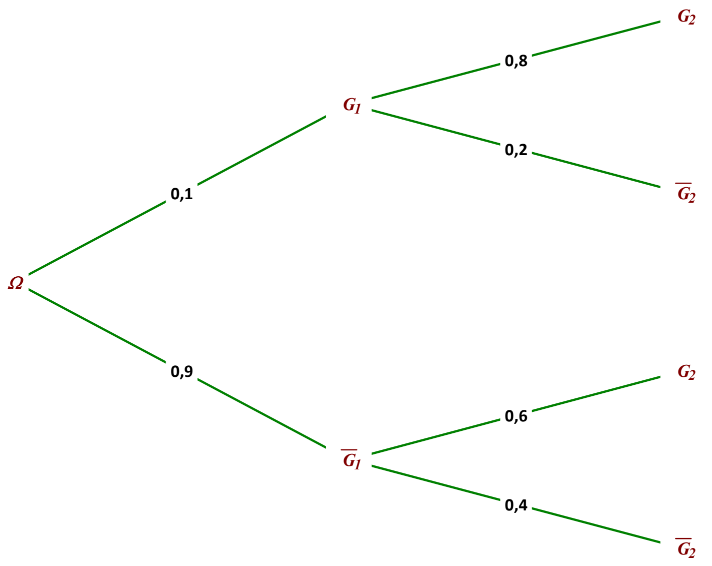
Exercice type :

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ; s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ; s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.
On note, pour tout entier naturel n, non nul : G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » et p_n la probabilité de l'évènement G_n. On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1) Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4) Montrer que pour tout n entier non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5) Montrer par récurrence que, pour tout entier n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration :

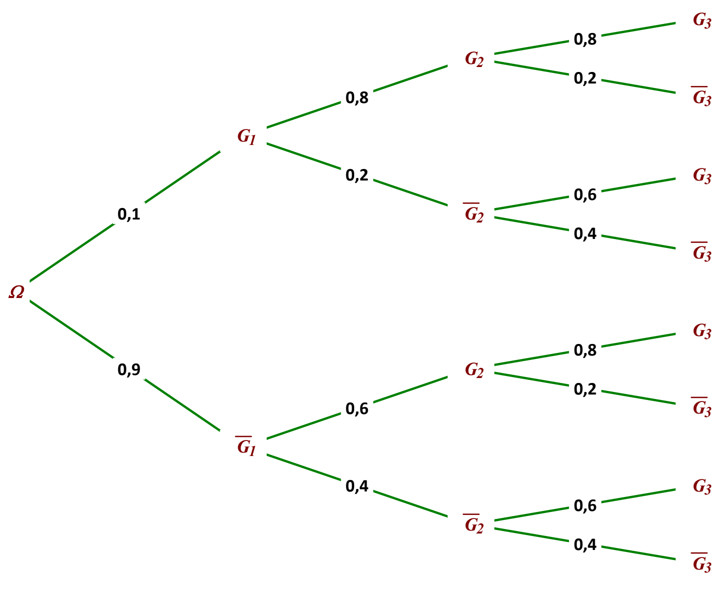
1) Voici l'arbre qui correspond à la situation.



$P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

2) $P_{G_2}(\overline{G_1}) = \dfrac{P(G_2 \cap \overline{G_1})}{P(G_2)} = \dfrac{P_{\overline{G_1}}(G_2) \times P(\overline{G_1})}{P(G_2)} = \dfrac{0,6 \times 0,9}{0,62} = 0,87$.

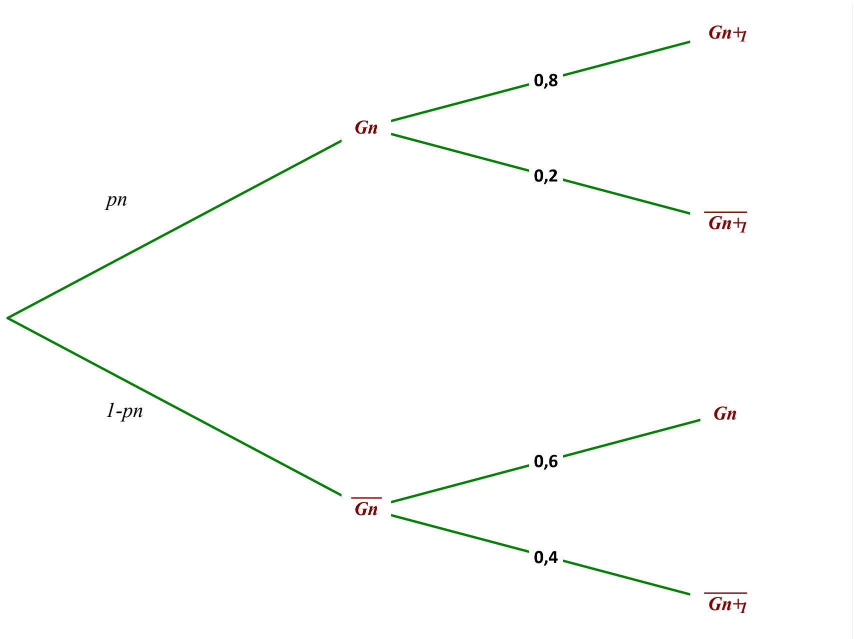
3) Posons A : « le joueur gagne au moins une partie sur les 3 premières parties ». Alors $\overline{A}$: « Le joueur perd toutes les parties sur les 3 premières ». Alors avec un arbre : $P(A) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) = P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) \times P_{\overline{G_2}}(\overline{G_3}) = 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.



Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ; s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ; s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n, non nul : G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » et p_n la probabilité de l'évènement G_n . On a donc $p_1 = 0,1$.

4) Construisons l'arbre de la nième partie :



Selon la formule des probabilités totales, pour tout n :

$$p_{n+1}=P\left(G_{n+1}\right)=P\left(G_n\cap G_{n+1}\right)+P\left(\overline{G_n}\cap G_{n+1}\right)=P\left(G_n\right)\times P_{G_n}\left(G_{n+1}\right)+P\left(\overline{G_n}\right)\times P_{\overline{G_n}}\left(G_{n+1}\right)=p_n\times 0,8+\left(1-p_n\right)\times 0,6$$

$$p_{n+1}=0,8p_n+0,6-0,6p_n=0,2p_n+0,6=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$$

5) Posons P(n) = $p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Initialisation : n = 1. $p_1=0,1$ et $\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{15}{20}-\frac{13}{20}=\frac{2}{20}=0,1$ donc $p_1=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^1$. P(1) est vraie.

Hérédité : Supposons P(n) vraie pour un rang n > 0 quelconque (HR) : $p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$ et montrons alors que P(n + 1) est vraie $\left(p_{n+1}\overset{?}{=}\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$.

Alors selon la question précédente et l'hypothèse de récurrence : ,

$$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}\overset{(HR)}{=}\frac{1}{5}\times\left[\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]+\frac{3}{5}=\frac{3}{20}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}+\frac{3}{5}=\frac{15}{20}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

. Alors P(n) vraie implique P(n+1) vraie.

Conclusion : Pour tout n > 0, P(n) est vraie c'est-à-dire : $p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

6) $-1<\frac{1}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{3}{4}$. Si on joue beaucoup, la probabilité de gagner à ce jeu est ¾ .

3) La formule des probabilités composées :

a) Formule : Soit $A_1,A_2,...,A_n$, n évènements de E tels que $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1}A_i\right)\neq 0$ alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(A_1\right)\times P_{A_1}\left(A_2\right)\times P_{A_1\cap A_2}\left(A_3\right)\times\ldots\times P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}\left(A_n\right).$$

b) Remarque : Cette formule permet ce calculer la probabilité d'une intersection d'évènements et elle est intéressante lorsqu'on a affaire à une (ou des) urne(s) à contenu évolutif (on ne remet pas les boules déjà extraites ou on n'en remet que certaines ou on remet les boules extraites accompagnées de boules supplémentaires…)

Exercice type : Soit un entier naturel $n \geq 1$.
On considère une urne contenant n – 1 boules blanches et 1 boule noire. On réalise plusieurs tirages successifs en piochant à chaque fois une boule sans remise. On note B_k (resp. N_k) : « c'est une boule blanche (resp. noire) qui est tirée au tirage numéro k ». Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire. Déterminer la loi de X. Quelle loi usuelle reconnait-on ?

Démonstration : Il y a n boules en tout. Il faut réaliser au moins 1 tirage et au maximum, nous ne pouvons qu'en faire n.
Donc $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.
Distinguons les cas :

Si k = 1, cela veut dire qu'on a pioché la boule noire au premier tirage : $P(X=1) = \frac{1}{n}$ (1 noire probable et n boules possibles)

Soit $k \in [\![2;n]\!]$. $(X = k)$ veut dire que l'on a pioché k – 1 boules blanches puis la boule noire à la fin lors de k tirages sans remise. Alors $(X=k) = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k$.

Selon la formule des probabilité composées :
$P(X=k) = P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times ... \times P_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1}}(N_k)$.

A chaque tirage, il ya une boule de moins dans l'urne.

$P(B_1) = \frac{n-1}{n}$ (n – 1 blanches probables et n boules possibles) ; $P_{B_1}(B_2) = \frac{n-2}{n-1}$ (n – 2 blanches probables et n – 1 boules possibles) ; $P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{n-3}{n-2}$ (n – 3 blanches probables et n – 2 boules possibles) ; …. ;

$P_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) = \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} = \frac{n-k+1}{n-k+2}$ (n – (k – 1) blanches probables et n – (k – 2) boules possibles) ;

$P_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n-k+1}$ (1 noire probable et n – (k – 1) possibles).

$P(X=k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times ... \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$.

En conclusion, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$ et X suit une loi uniforme discrète de paramètre $\frac{1}{n}$ sur $[\![1;n]\!]$.