Les fonctions exponentielle et logarithme népérien

1 – Existence et propriétés de la fonction exponentielle :

1) Définition : Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et on la note exp.

Remarque : Pour tout x, $(\exp)'(x) = \exp(x)$, $\exp(0) = 1$ et $\exp(x) \neq 0$

2) Propriétés : Pour tous réels x et y et tout relatif n :

a) $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ b) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

c) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ d) $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

3) La notation d'Euler :

a) Le nombre e : On appelle e le nombre e = exp (1). A la calculatrice, $e \approx 2{,}718$ au centième. C'est un irrationnel.

b) La notation puissance : En prenant la propriété d) pour x = 1, on obtient pour tout entier relatif n : $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$.
On généralise pour tout x réel : $\exp(x) = e^x$.

c) Conséquences : Pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

i) $(e^x)' = e^x$ ii) $e^0 = 1$ iii) $e^{x+y} = e^x \times e^y$ iv) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ v) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

vi) $e^{nx} = (e^x)^n$ (par conséquent : pour tout réels x et y, $e^{xy} = (e^x)^y$)

Méthode : Comment transformer une expression quotient comportant des exponentielle à l'aide d'une autre écriture ?

On peut appliquer plusieurs méthodes équivalentes.

Méthode 1 : On utilise $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ ou $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ puis on réalise une mise au même dénominateur et la simplification des calculs doit nous donner la deuxième expression.
Méthode 2 : On multiplie au numérateur et au dénominateur par la même exponentielle de façon à faire apparaitre celle que l'on souhaite. Pour cela on utilise la propriété $e^x \times e^{-x} = 1$.
Méthode 3 : On factorise au numérateur et au dénominateur par la même exponentielle et après simplification de celle-ci, on obtient l'expression que l'on souhaite. Pour cela on utilise la propriété $e^x \times e^{-x} = 1$.

Application : Montrer que pour tout réel, $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

Démonstration :

Méthode 1 : $\dfrac{1}{e^{-x}+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = \dfrac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Méthode 2 : $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^0}{e^{-x}+e^0} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

Méthode 3 : $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x \times 1}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

Remarque : Cette méthode est essentielle. Elle permet par exemple de débloquer des formes indéterminées pour des limites ou bien de déterminer des primitives pour calculer des intégrales.

2 – Etude de la fonction exponentielle :

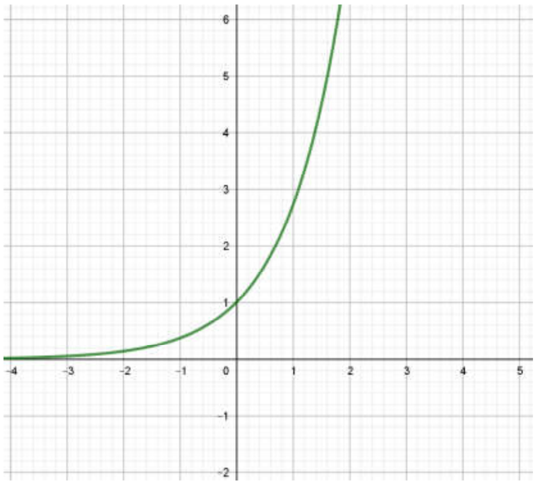
1) <u>Signe</u> : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour tout x, $e^x > 0$.

2) <u>Variations :</u> La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) <u>Limites</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

4) <u>Courbe et tableau de variation :</u>

x	-∞	+∞
exp(x)	0 ↗	+∞



5) <u>Propriétés diverses :</u>

a) <u>Ordre</u> : $e^a \le e^b$ ssi $a \le b$.

b) <u>Egalité</u> : $e^a = e^b$ ssi $a = b$.

<u>Méthode</u> : Comment résoudre une équation ou une inéquation avec de exponentielles ?
Pour une équation ou inéquation classique : On utilise les propriétés de l'exponentielle pour simplifier et on essaye d'avoir une exponentielle à gauche et une à droite de l'égalité (ou inégalité). Les nombres appliqués aux exponentielles sont alors égaux (ou se comparent dans le même sens) et on continue la résolution. On peut aussi exploiter le lien entre exponentielle et logarithme.
Attention, le signe d'une expression qui comporte une exponentielle doit toujours être justifié en posant une inéquation que l'on résout entièrement.
On peut résoudre un certain type d'équation ou d'inéquation par changement de variable $X = e^x$. Le lien avec la fonction logarithme est souvent exploité.

<u>Applications</u> : Résoudre : a) $e^{2x+1} \times e^{-4x+5} = \dfrac{e^{x+1}}{e^2}$ b) $\dfrac{e^x - 1}{e - e^x} \ge 0$ c) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

<u>Démonstration</u> :

a) $e^{2x+1} \times e^{-4x+5} = \dfrac{e^{x+1}}{e^2} \Leftrightarrow e^{2x+1-4x+5} = e^{x+1-2} \Leftrightarrow e^{-2x+6} = e^{x-1} \Leftrightarrow -2x+6 = x-1 \Leftrightarrow -3x = -7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$. La solution est $\dfrac{7}{3}$.

b) Il faut construire un tableau de signe. On résout $e^x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 0$ et $e - e^x \ge 0 \Leftrightarrow e \ge e^x \Leftrightarrow 1 \ge x$. Le réel 1 est une valeur interdite. Construisons un tableau de signes :

x	-∞	0		1	+∞
exp(x)-1	−	0	+	¦	+
exp(1)-exp(x)	+	¦	+	0	−
(exp(x)-1)/(exp(1)-exp(x))	−	0	+	‖	−

Les solutions sont les réels de $[0;1[$.

c) $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 + e^x - 2 = 0$. On pose $X = e^x$ alors on obtient $X^2 + X - 2 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$. Il y a deux solutions en X : $X_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$. Revenons à l'inconnue x.
$e^x = 1$ ou $e^x = -2$. La deuxième équation est impossible car $e^x > 0$ pour tout x. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. La solution est 0.

c) Comparaison à 1 : Si x < 0 alors $0 < e^x < 1$ et si x > 0 alors $e^x > 1$.

d) Formes indéterminées :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

e) Inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

f) Dérivées : Soit u une fonction dérivable sur I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout x de I :

$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$.

3 – Création et premières propriétés de la fonction logarithme népérien :

1) Avec la fonction exponentielle : La fonction exponentielle est un fonction continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y de $]0;+\infty[$, il existe un unique réel x dans $\mathbb{R}$ tel que $e^x = y$. (On dit alors que exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$). On note ce réel x = ln y.

Nous définissons alors une nouvelle fonction ln de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ qui à y > 0 associe ln y = x : c'est la fonction logarithme népérien (On dit que la fonction logarithme est la bijection réciproque de la fonction exponentielle)

2) Premières propriétés :

a) La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$, plus généralement, on calcule des logarithmes appliqués à des nombres strictement positifs. Ceci implique qu'une réflexion sur un ensemble de définition autre que $\mathbb{R}$ s'imposera avec des logarithmes.

b) Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = x$.

c) Pour tout réel x > 0, $e^{\ln x} = x$.

d) ln 1 = 0 et ln e = 1.

Méthode : Comment déterminer un ensemble de définition associé à une fonction logarithme.
Pour chaque logarithme, on utilise l'expression avec laquelle il est composé et on pose que ces expressions doivent être strictement positives. Ensuite, on résout les inéquations obtenues. L'ensemble final est l'ensemble intersection de toutes les solutions trouvées.

Application : Déterminer les ensembles de définitions des expressions suivantes :
a) A(x) = ln x + ln (2x – 1) – ln (5 – x)

Démonstration : Il faut que x > 0 et 2x – 1 > 0 et 5 – x > 0 alors x > 0 et $x > \frac{1}{2}$ et x < 5 donc Df = $\left]\frac{1}{2};5\right[$. (Ensemble commun)

b) B(x) = ln [(3x – 2)(x + 4)]

Démonstration : Il faut que (3x – 2)(x + 4) > 0. Faisons un tableau de signes : (second degré avec a = 3 > 0)

3x – 2 = 0 ssi $x = \frac{2}{3}$; x + 4 = 0 ssi x = -4.

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
(3*x-2)*(x+4)		+	0	−	0	+	

$D_B =]-\infty;-4[\cup \left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

4 – Propriétés de calculs :

1) Relation fonctionnelle : Pour tous réels a et b strictement positifs, ln (ab) = ln a + ln b. (logarithme d'un produit)

2) Conséquence : Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n,

a) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$. b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. c) $\ln\left(a^n\right) = n \times \ln a$. d) $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

3) Généralisation : Si a est un réel strictement positif et si b est un réel quelconque alors : $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Méthode : Comment transformer un logarithme sous une forme plus simple ou demandée.

Il faut savoir décomposer le nombre appliqué au logarithme en éléments simples (décomposition en facteurs premiers, sous forme de produit, de quotient ou de puissance. Ensuite, on utilise les formules précédentes.

Application : a) Écrire ln 200 à l'aide de ln 2 et de ln 5.

Démonstration : $200 = 4 \times 50 = 2^2 \times 2 \times 25 = 2^3 \times 5^2$. Alors $\ln 200 = \ln\left(2^3 \times 5^2\right) = \ln\left(2^3\right) + \ln\left(5^2\right) = 3\ln 2 + 2\ln 5$.

b) Simplifier $\ln\left(\frac{18e^{-2}}{12e^3}\right)$.

Démonstration :

$$\ln\left(\frac{18e^{-2}}{12e^3}\right) = \ln 18 + \ln e^{-2} - \ln 12 - \ln e^3 = \ln\left(2 \times 3^2\right) + (-2) - \ln\left(3 \times 2^2\right) - 3 = \ln 2 + 2\ln 3 - \ln 3 - 2\ln 2 - 5 = \ln 3 - \ln 2 - 5 .$$

5 – Etude de la fonction logarithme népérien :

1) Dérivabilité : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x > 0, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

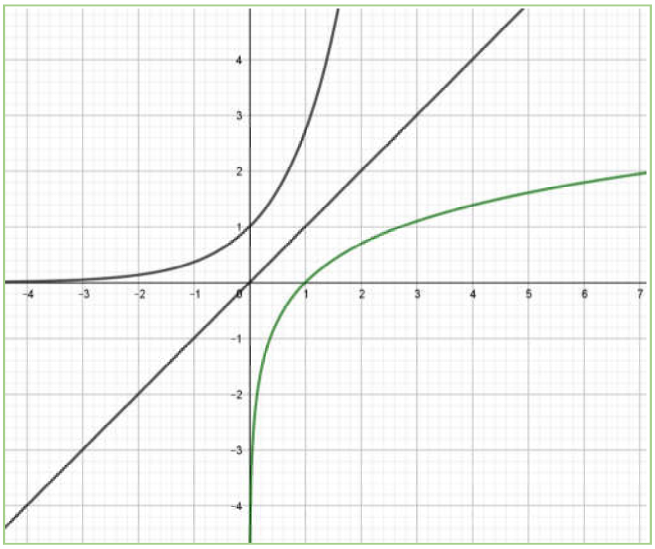
2) Continuité : La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$. (Elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur $]0;+\infty[$)

3) Variations : La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4) Limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$. (La droite d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe de la fonction ln).

5) Tableau de variation et courbe :

x	0	+∞
$1/x$	‖ +	
ln(x)	‖ -∞ ↗	+∞



Remarque : La courbe de la fonction ln et de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

6) Propriétés diverses :

a) Ordre : $\ln a \le \ln b$ ssi $a \le b$. (inéquations)
b) Egalité : $\ln a = \ln b$ ssi $a = b$. (équations)
c) Signe : Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$ et si $x > 1$ alors $\ln x > 0$.

Méthode 1: Comment résoudre des équations et des inéquations avec des logarithmes.

Après avoir étudié les ensembles de définition, si possible se ramener à un logarithme de chaque côté de l'égalité ou de l'inégalité. Ensuite, on utilise les propriétés ci-dessus ou la réciprocité avec la fonction exponentielle.

Méthode 2 : Comment étudier le signe d'un logarithme.

Après avoir étudié les ensembles de définition, poser une inéquation par rapport à 0 et remplacer 0 par ln 1. Puis appliquer les propriétés ci-dessus.

Applications :

a) Résoudre $\ln x = \ln 6 - \ln(x - 1)$. b) Résoudre $\ln [x(x - 1)] = \ln 6$. c) Résoudre $(\ln x)^2 - 5\ln x - 14 = 0$.

d) Résoudre $\ln(2 - 5x) \le 6$ e) Résoudre $2e^{2x-5} > 6$. f) Etudier le signe de $\ln (3x - 4)$.

Démonstration : Il faut que $x > 0$ et $x - 1 > 0$ donc $x > 0$ et $x > 1$ donc $D_E =]1;+\infty[$. Soyons malins, plutôt que d'utiliser $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$ et de créer un quotient, il est judicieux de regrouper du bon côté pour avoir une addition et utiliser ln a + ln b. On peut alors appliquer ln(ab).

On a : $\ln[x(x-1)] = \ln 6$ alors $x^2 - x = 6$ donc $x^2 - x - 6 = 0$. $\Delta = 1 + 24 = 25$. Deux solutions : $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \in D_E$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \notin D_E$. La solution est 3.

b) $\ln [x(x - 1)] = \ln 6$.

Démonstration : Il faut que $x(x - 1) > 0$. On fait le tableau de signes de $x^2 - x$.

x	-∞		0		1		+∞
x*(x-1)		+	0	−	0	+	

$D_E =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$. En utilisant la question précédente, les solutions sont -2 et 3.

c) $(\ln x)^2 - 5\ln x - 14 = 0$.

Démonstration : Méthode spécifique.
Il faut $x > 0$ donc $D_E =]0;+\infty[$. Rappelez-vous la technique du changement de variable. On pose X = ln x. On obtient $X^2 - 5X - 14 = 0$. $\Delta = 25 + 56 = 81 > 0$. Il y a deux racines. $X_1 = \frac{5+9}{2} = 7$ et $X_2 = \frac{5-9}{2} = -2$. Revenons à la première inconnue. ln x = 7 ou ln x = -2. Alors $x = e^7$ ou $x = e^{-2}$ toutes les deux strictement positives.
Il y a deux solutions e^7 et e^{-2}.

d) $\ln(2-5x)\le 6$.

Démonstration : Il faut que $2-5x>0$ alors $x<\frac{2}{5}$. Donc $D_E=\left]-\infty;\frac{2}{5}\right[$. On fait $\ln(2-5x)\le \ln e^6$ alors $2-5x\le e^6$ donc $2-e^6\le 5x$ et $\frac{2-e^6}{5}\le x$. Comme $\frac{2-e^6}{5}<\frac{2}{5}$ alors les solutions sont les réels de $S=\left[\frac{2-e^6}{5};\frac{2}{5}\right[$.

e) Signe de ln (3x – 4) :

Démonstration : Il faut que 3x – 4 > 0 donc $x>\frac{4}{3}$. $D_E=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$. ln (3x – 4) ≥ 0 ssi ln (3x – 4) ≥ ln 1 ssi 3x – 4 ≥ 1 ssi 3x ≥ 5 ssi $x\ge\frac{5}{3}$. On fait un tableau de signe sur $D_E=\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ pour avoir le signe complet.

x	$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
ln(3x-4)	||	−	0	+	

7) Formes indéterminées : n est un entier naturel non nul.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; plus généralement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$; plus généralement, $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$.

c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$; de même $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Méthode : Comment débloquer une forme indéterminée avec un logarithme.
Il faut faire apparaitre par un calcul, une des trois formes précédentes. Il faut se concentrer « vers quoi » tend le logarithme selon « vers quoi » tend x.

Application : a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}$ b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Démonstration :

a) $\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x+1}{x+1}=\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x}=\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

Si $x\to+\infty$ alors $X=x+1\to+\infty$. donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$. Alors par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=0$.

b) Posons $X=\frac{1}{x}$. Si $x\to+\infty$ alors $X=\frac{1}{x}\to0^+$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}X^2\ln X=0$.

8) Dérivée du logarithme d'une fonction : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction ln (u) est dérivable sur I et $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$.

Méthode : Comment dériver le logarithme d'une fonction strictement positive et dérivable sur son ensemble de définition ?

On isole la fonction u appliquée au logarithme et on la dérive. Ensuite, on applique la formule ci-dessus ;

Application : Dériver la fonction définie par $f(x)=\ln\frac{x-1}{x-2}$.

Démonstration : Cette fonction existe et est dérivable ssi $\frac{x-1}{x-2}>0$. Après l'étude d'un tableau de signe, nous obtenons $D_f=\left]-\infty;1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

$U=\frac{x-1}{x-2}$ donc $U'=\frac{1\times(x-2)-1\times(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}$. Alors $f'(x)=\frac{\frac{-1}{(x-2)^2}}{\frac{x-1}{x-2}}=\frac{-1}{(x-2)^2}\times\frac{x-2}{x-1}=\frac{-1}{(x-2)(x-1)}$