Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes d'ordre 2

1 – suites arithmétiques :

1) Définition : La suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$, le premier terme étant donné.
On ajoute (ou on soustrait) le même nombre pour passer d'un terme au suivant.

Méthode 1 : Comment montrer qu'une suite est arithmétique ?

On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout n et on montre que le résultat est un réel indépendant de n, qui est donc la raison.

Application : Démontrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = 5n - 2$ est une suite arithmétique :

Démonstration : Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 2 - (5n-2) = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5$. Donc la suite est arithmétique de raison r = 5 et de premier terme $u_0 = -2$.

Méthode 2 : Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique ?

On calcule trois termes consécutifs, par exemple u_0, u_1 et u_2 et on montre que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Application : Démontrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$ n'est pas une suite arithmétique.

Démonstration : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$. Alors $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1 \neq u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$. Donc la suite n'est pas arithmétique.

2) Terme en fonction d'un autre : Si r est la raison, on a pour tous entiers n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

En particulier si le premier terme est u_0, pour tout n, $u_n = u_0 + nr$.
En particulier, si le premier terme est u_1, pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

3) Sens de variation : Soit u une suite arithmétique de raison r :

a) Si r > 0 alors la suite u est strictement croissante.
b) Si r < 0 alors la suite u est strictement décroissante.
c) Si r = 0 alors la suite u est constante.

Remarque : Les points représentant la suite sont alignés sur une droite.

4) Somme de termes consécutifs :

a) Cas particulier : Pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Cas général : S = (nombre de termes)$\times \frac{\text{premier terme de la somme + dernier terme de la somme}}{2}$.

c) Cas fréquent : S = $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

5) Limite : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Si r > 0 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Si r < 0 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
Si r = 0 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

2 – SUITE GÉOMÉTRIQUE :

1) Définition : La suite (u_n) est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout n, $u_{n+1} = q\,u_n$, le premier terme étant donné.
On multiplie (ou on divise) par le même nombre pour passer d'un terme au suivant.

Méthode 1 : Comment montrer qu'une suite est géométrique ?

On exprime le terme u_{n+1} et on cherche à factoriser un nombre indépendant de n (qui est donc la raison q) de façon à faire apparaitre la relation $u_{n+1} = qu_n$ pour tout n.

Application : Démontrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = 2\times 3^n$ est une suite géométrique :

Démonstration : Pour tout n, $u_{n+1} = 2\times 3^{n+1} = 2\times 3^n \times 3 = 3u_n$ donc la suite est géométrique de raison q = 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

Méthode 2 : Comment montrer qu'une suite n'est pas géométrique ?
On calcule trois termes consécutifs non nuls, par exemple u_0, u_1 et u_2 et on montre que $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.

Application : Démontrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas géométrique.

Démonstration : $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$. Alors $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4}{1} = 4 \neq \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{9}{4}$. Donc la suite n'est pas géométrique.

2) Terme en fonction d'un autre : Si q est la raison on a pour tous entiers n et p, $u_n = u_p\,q^{(n-p)}$.

En particulier si le premier terme est u_0 , pour tout n, $u_n = u_0\,q^n$
En particulier si le premier terme est u_1 , pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_1\,q^{n-1}$

3) Sens de variation : Soit u une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q non nulle :

a) Si q > 1 alors la suite u est strictement croissante si $u_{n_0} > 0$ et strictement décroissante si $u_{n_0} < 0$.

b) Si 0 < q < 1 alors la suite u est strictement croissante si $u_{n_0} < 0$ et strictement décroissante si $u_{n_0} > 0$.

c) Si q < 0, alors la suite u n'est pas monotone. Elle est alternée.
d) Si q = 0 alors la suite est constante égale à 0
e) Si q = 1 alors la suite est constante égale à u_{n_0} .

4) Somme de termes consécutifs :

a) Cas particulier : Pour tout $n \geq 0$, s si $q \neq 1$, $1+q+q^2+\text{..........}+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

b) Cas général : S = (premier terme de la somme)$\times \dfrac{1-(\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$.

c) Cas fréquent : S = $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

5) Limite : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

i) Si q > 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$.

ii) Si q = 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

iii) Si -1 < q < 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

iv) Si $q \leq -1$ alors la suite n'admet pas de limite.

3 – Suite arithmético-géométrique :

1) <u>Définition</u> : La suite (u_n) est arithmético-géométrique si et seulement si il existe deux réels a et b tels que pour tout n, $u_{n+1} = au_n + b$, le premier terme u_0 étant donné.

<u>Remarques</u> :
Si a = 0 alors pour tout n, $u_{n+1} = b$ et la suite est constante et égale à b.
Si a = 1 alors pour tout n, $u_{n+1} = u_n + b$ et la suite est arithmétique de raison b.
Si b = 0 alors pour tout n, $u_{n+1} = au_n$ et la suite est géométrique de raison a.

2) <u>Propriété</u> : Soit $a \neq 1$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Posons $r = \dfrac{b}{1-a}$.
Alors la suite définie pour tout n par $v_n = u_n - r$ est géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - r$.

3) <u>Conséquence</u> : Pour tout n, $v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - r)a^n$.

4) <u>Terme général</u> : Alors pour tout n, $u_n = v_n + r = (u_0 - r)a^n + r$.

<u>Remarque</u> : Il est possible d'apprendre par cœur la formule du 4) mais attention, elle n'est vraie que si le premier terme est u_0. Il faut donc l'adapter si le premier terme est différent. Ensuite, la plupart du temps dans les exercices, il est possible qu'on vous demande de démontrer les paragraphes 2), 3) et 4) avec la suite étudiée. Il donc conseillé de bien maitriser les formules sur les suites géométriques qui sont à la base.

5) <u>Limite</u> : Soit $a \neq 1$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Si $|a| < 1$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r$.
Si a > 1 alors (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > r$ ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < r$.
Si $a \leq -1$ alors (u_n) diverge et n'a pas de limite.

6) <u>Sommes des n + 1 premiers termes</u> : Pour tout n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 - r)\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)r$.

7) <u>Exercice-type</u> : Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Déterminer son terme général en fonction de n.

<u>Démonstration</u> : Nous avons a = 3 et b = – 4. Posons $r = \dfrac{-4}{1-3} = \dfrac{-4}{-2} = 2$.
La suite définie pour tout n par $v_n = u_n - 2$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - r = 1 - 2 = -1$.
Alors pour tout n, $v_n = v_0 \times a^n = -3^n$.
Par conséquent, pour tout n, $u_n = v_n + r = -3^n + 2$.

4 – Suites récurrentes d'ordre 2 :

1) <u>Définition</u> : Une suite (u_n) est une <u>suite récurrente linéaire d'ordre 2</u> s'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout entier n, on ait : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec u_0 et u_1 donnés.
On appelle <u>équation caractéristique</u> associée à la suite l'équation du second degré de la forme : $r^2 = ar + b \Leftrightarrow r^2 - ar - b = 0$.

2) <u>Résolution</u> : On résout l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.

<u>1^{er} cas</u> : $\Delta > 0$ et il existe deux racines r_1 et r_2 distinctes.

Il existe donc deux constantes λ et μ telles que pour tout entier n, $u_n = \lambda r_1^{\,n} + \mu r_2^{\,n}$.

2^e cas : $\Delta = 0$ et il existe une seule racine double r.

Il existe donc deux constantes λ et μ telles que pour tout entier n, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n = (\lambda + \mu n) r^n$.

Remarque : On peut donner une expression de u_n quand $\Delta < 0$ mais ce n'est pas au programme.

Objectif : Par la suite, le but est de déterminer les valeurs des constantes λ et μ en utilisant les valeurs de u_0 et u_1.

3) Exercices-type :

a) Résoudre $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ où $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

Démonstration : On utilise l'équation caractéristique : $r^2 = -r + 2 \Leftrightarrow r^2 + r - 2 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$.
Il y a deux racines distinctes $r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$.
Alors il existe des constantes λ et μ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times 1^n + \mu(-2)^n$.
Déterminons les constantes λ et μ :
Si n = 0, $0 = u_0 = \lambda \times 1^0 + \mu(-2)^0 = \lambda + \mu$; Si n = 1, $3 = u_1 = \lambda \times 1^1 + \mu(-2)^1 = \lambda - 2\mu$.
On obtient : $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 3 \end{cases}$. Avec la première ligne, nous avons $\lambda = -\mu$. En remplaçant dans la deuxième ligne, $-3\mu = 3$ alors $\mu = -1$ et $\lambda = 1$.
En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (-2)^n$.

b) Résoudre $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ où $u_0 = 5$ et $u_1 = 6$.

Démonstration :
On utilise l'équation caractéristique : $r^2 = 6r - 9 \Leftrightarrow r^2 - 6r + 9 = 0$. $\Delta = 36 - 36 = 0$.
Il y a une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$.
Alors il existe des constantes λ et μ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times 3^n + \mu n 3^n = (\lambda + \mu n)3^n$.

Déterminons les constantes λ et μ :
Si n = 0, $5 = u_0 = (\lambda + 0 \times \mu) \times 3^0 = \lambda$; Si n = 1, $6 = u_1 = (\lambda + 1 \times \mu) \times 3^1 = 3\lambda + 3\mu$.
On obtient : $\begin{cases} \lambda = 5 \\ 3\lambda + 3\mu = 6 \end{cases}$. Avec la première ligne, nous avons $\lambda = 5$. En remplaçant dans la deuxième ligne, $15 + 3\mu = 6$ alors $\mu = -3$.
En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (5 - 3n)3^n$.