Limites de fonctions, asymptotes et branches infinies

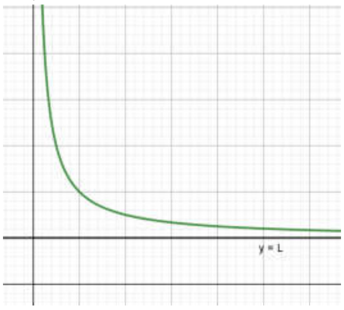
Le but principal de ce chapitre est d'étudier le comportement des valeurs d'une fonction lorsque la variable se rapproche des bornes de l'intervalle d'étude ou d'une valeur particulière donnée.
Nous ne reviendrons pas sur les définitions du concept de limite.
Dans toute cette leçon, on considère une fonction f définie sur un domaine D et Cf sa courbe représentative dans un repère.

1 – Asymptotes directes :

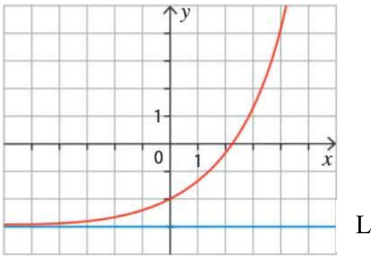
1) Asymptote horizontale : On considère que le domaine D comporte au moins une borne infinie.

a) Définition :
Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, alors la courbe Cf admet la droite d'équation y = L comme asymptote horizontale en $+\infty$.
Lorsque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, alors la courbe Cf admet la droite d'équation y = L comme asymptote horizontale en $-\infty$.

b) Interprétation :
Lorsque les valeurs de la variable x sont de plus en plus grandes, c'est-à-dire au voisinage de $+\infty$, la courbe Cf se rapproche de plus en plus de la droite horizontale d'équation y = L.



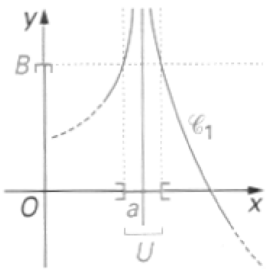
Lorsque les valeurs de la variable x sont de plus en plus petites, c'est-à-dire au voisinage de $-\infty$, la courbe Cf se rapproche de plus en plus de la droite d'équation y = L.



2) Asymptote verticale : Soit a un réel, n'appartenant pas forcement au domaine D mais étant au moins au voisinage de l'une des bornes de D.

a) Définition : Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ alors la courbe Cf admet la droite d'équation x = a comme asymptote verticale.

b) Interprétation : Lorsque les valeurs de la variable x sont de plus en plus proches de a, c'est-à-dire au voisinage de a, la courbe Cf se rapproche de plus en plus de la droite verticale d'équation x = a.



2 – Limites des fonctions usuelles à connaître :

1) Limite quand x tend vers l'infini :

Constantes : Soit $k \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} k = \lim_{x\to-\infty} k = k$.

Polynômes : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si n impair} \\ +\infty & \text{si n pair} \end{cases}$.

Racine carrée : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Inverses : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Cas général : Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Exponentielle : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par inverse, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

Logarithme : $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

2) Limite quand x tend vers x = a réel :

Lorsque f existe en a et est continue en a (chapitre 7), nous avons $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ lorsque $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, avec $g(a) = 0$ et $g(x) > 0$ pour $x \neq a$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ lorsque $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, avec $g(a) = 0$ et $g(x) < 0$ pour $x \neq a$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

$\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

3) Principes à retenir dans ces deux cas :

Principe 1 : Inverser une limite infinie donne une limite nulle. "$\frac{1}{\infty} \to 0$"

Principe 2: Inverser une limite nulle donne une limite infinie, dont le signe est à déterminer par une étude de signe. "$\frac{1}{0} \to \infty$" .

3 – Opérations de base sur les limites :

1) Limite d'une somme : L et L' sont deux nombres réels. Si x tend vers un réel a, ou bien vers $+\infty$ ou bien vers - ∞, alors :

Si f a pour limite	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors (f + g) a pour limite	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 3 : Le bon sens : des limites finies s'additionnent, une limite infinie l'emporte par addition sur une limite finie et on peut ajouter des infinis de même signe.

2) Limite d'un produit : L et L' sont deux nombres réels. Si x tend vers un réel a, ou bien vers $+\infty$ ou bien vers $-\infty$, alors :

Si f a pour limite	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $f\times g$ a pour limite	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 3 : Le bon sens : des limites finies se multiplient, les imites infinies se multiplient et une limite infinie l'emporte par multiplication sur une limite finie non nulle.

Principe 4 : La règle des signes est essentielle et fonctionne avec les limites de produits.

3) Limite d'un quotient :

a) Cas où le dénominateur admet une limite non nulle : L et L' sont deux nombres réels, $L' \neq 0$. Si x tend vers un réel a, ou bien vers $+\infty$ ou bien vers $-\infty$, alors :

Si f a pour limite	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si g a pour limite	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$\pm\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 1 : Inverser une limite infinie donne une limite nulle. "$\frac{1}{\infty} \to 0$"

Principe 3 : Le bon sens : des limites finies se divisent à condition que la limite du dénominateur soit non nulle et une limite infinie au numérateur l'emporte sur une limite de dénominateur finie non nulle.

Principe 4 : La règle des signes est essentielle et fonctionne avec les limites de quotients.

b) Cas où le dénominateur admet une limite égale à 0 : L est un nombre réel non nul. Si x tend vers un réel a, ou bien vers $+\infty$ ou bien vers $-\infty$, alors :

Si f a pour limite	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	0
Si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 2: Inverser une limite nulle donne une limite infinie, dont le signe est à déterminer par une étude de signe. "$\frac{1}{0} \to \infty$".

Principe 4 : La règle des signes est essentielle et fonctionne avec les limites de quotients.

PRINCIPE 5 : Il y a quatre situations à bien connaitre où on ne peut pas conclure la limite d'une opération tout de suite. Il faut débloquer la situation. Ce sont les quatre formes indéterminées que nous étudierons au paragraphe 5.

Méthode : Comment inverser une limite infinie ?

La fonction est sous forme de fraction. Il faut montrer que le numérateur a une limite finie et que le dénominateur a une limite infinie. Le résultat final est donc une limite nulle.

Application : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2+2x}$.

Démonstration : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x = +\infty$ alors par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2+2x} = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

Méthode : Comment déterminer le signe final d'une inversion de limite nulle ?

On calcule la limite du numérateur pour obtenir un nombre réel non nul dont on analyse le signe. Ensuite, on montre que la limite du dénominateur est nulle. Puis on étudie le signe du dénominateur au voisinage de là où tend x. On conclut une limite infinie dont le signe est donné par la règle des signes.

Applications : Déterminer a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-8}{x-2}$ et b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{e^x}$.

Démonstration :

a) $\lim\limits_{x\to2} 3x-8 = -2 < 0$ et $\lim\limits_{x\to2} x-2 = 0$. Il y a une inversion de 0 donc étudions le signe de x – 2 au voisinage de 2.

x	-∞		2		+∞
x-2		−	0	+	

Le signe change au voisinage de 2 donc, on doit rédiger deux limites : une à gauche et une à droite.

$\lim\limits_{x\to2} 3x-8 = -2 < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2 = 0^-$ alors par quotient, $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-8}{x-2} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to2} 3x-8 = -2 < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-2 = 0^+$ alors par quotient, $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-8}{x-2} = -\infty$.

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe de f.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = 5 > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Il y a une inversion de 0 donc étudions le signe de e^x au voisinage de $-\infty$.

Or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = 5 > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{e^x} = +\infty$.

4 – Limite et composition :

Théorème : α, β et γ désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; f , g désignent deux fonctions telle que $f(D_f) \subseteq D_g$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \boxed{\beta}$ et $\lim\limits_{X\to\boxed{\beta}} g(X) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g[f(x)] = \gamma$.

Méthode : Comment montrer une limite par composition ?

On commence par décomposer l'expression à l'aide de fonctions usuelles f et g (On peut décomposer avec plus de fonctions si besoin). On déterminer la limite de f et on se sert de ce résultat pour faire tendre la variable de g. On obtient la limite finale composée.

Application : Etude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}$?

Démonstration : $x \overset{f:x\mapsto 2+\frac{1}{x^2}}{\mapsto} 2+\dfrac{1}{x^2} \overset{g:X\mapsto\sqrt{X}}{\mapsto} \sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x^2} = \boxed{2}$ et $\lim\limits_{X\to\boxed{2}} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{2}$

.

5 – Les quatre formes indéterminées :

1) Définition : Une forme indéterminée correspond à un cas où on ne peut pas conclure tout de suite sur la limite d'une fonction car il y a plusieurs possibilités. Il faut donc faire des calculs supplémentaires pour la débloquer et conclure. Il ne faut pas confondre une forme indéterminée avec la possibilité qu'une fonction n'ait pas de limite.

Il y a quatre formes $"+\infty+(-\infty)"$, $"0\times\infty"$ $"\frac{0}{0}"$ $"\frac{\infty}{\infty}"$. Les méthodes suivantes s'appliquent majoritairement mais il en existe d'autres.

2) Méthode : Comment débloquer $"\frac{0}{0}"$ dans une fonction factorisable ?

Méthode 1 : Il faut factoriser les expressions qui construisent la fonction (un facteur commun apparaît) puis il faut simplifier. On calcule alors la limite avec la nouvelle expression.

Application : Déterminer a) $\lim\limits_{x\to5}\frac{3x^2-12x-15}{x^2-25}$ et b) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{(x+3)^2}$.

Démonstration :

a) $\lim\limits_{x\to5}3x^2-12x-15=0$ et $\lim\limits_{x\to5}x^2-25=0$. Il faut factoriser les deux expressions. $\Delta=324$ alors il y a deux racines -1 et 5.

Donc $\frac{3x^2-12x-15}{x^2-25}=\frac{3(x+1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}\overset{x\neq5}{=}\frac{3(x+1)}{(x+5)}$ après simplification. Alors $\lim\limits_{x\to5}\frac{3x^2-12x-15}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to5}\frac{3(x+1)}{(x+5)}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to-3}x^2+x-6=0$ et $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)^2=0$. Il faut factoriser les deux expressions. $\Delta=25$ alors il y a deux racines -3 et 2.

Donc $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)^2}\overset{x\neq-3}{=}\frac{(x-2)}{(x+3)}$ après simplification. Donc $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x-2)}{(x+3)}$.

$\lim\limits_{x\to-3}(x-2)=-5<0$ et $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)=0$. C'est une inversion de 0 donc on étudie le signe de x + 3 :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
x+3		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-3}(x-2)=-5<0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}(x+3)=0^+$ alors par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\frac{(x-2)}{(x+3)}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3}(x-2)=-5<0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}}(x+3)=0^-$ alors par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}}\frac{(x-2)}{(x+3)}=+\infty$.

La droite d'équation x = -3 est asymptote verticale à la courbe.

Méthode 2 : On peut aussi utiliser la définition de la dérivabilité d'une fonction que l'on sait dérivable en un point et dont on calcule la fonction dérivée en ce point. Pour cela, il faut faire apparaitre un taux de variation d'une fonction en a, exploiter le fait que cette fonction soit dérivable en a et calculer $f'(a)$ après dérivation.

Application : Montrer que a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ et b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=5$.

Démonstration : a) Posons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$. Remarquons que $f(0)=e^0=1$. Alors $\frac{e^x-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Nous reconnaissons le taux de variation de la fonction f en 0. Or la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0 d'où $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$. Calculons $f'(0)$. Pour tout x, $f'(x)=e^x$ donc $f'(0)=e^0=1$. Pour conclure, $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

b) Posons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+3x$. Remarquons que $g(1)=1^2+3=4$. Alors $\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$. Nous reconnaissons le taux de variation de la fonction g en 1. Or la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 1 d'où $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$. Calculons $g'(1)$. Pour tout, $g'(x)=2x+3$ donc $g'(1)=2\times1+3=5$. Pour conclure, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=5$.

3) Méthode : Comment débloquer $"+\infty+-\infty"$?

Méthode 1 : Il faut factoriser toute la fonction par un « terme prépondérant » (qui n'est pas forcement un facteur commun donc ne pas oublier de diviser et penser à simplifier) puis calculer la limite de chaque facteur, puis du produit obtenu.

Application : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-12x-15$.

Démonstration : $3x^2-12x-15=x^2\left(3-\frac{12}{x}-\frac{15}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{12}{x}-\frac{15}{x^2}\right)=3>0$ alors par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-12x-15=+\infty$.

Méthode 2 : Cas particulier pour une différence avec une ou deux racines carrées.
Il faut multiplier et diviser par l'expression conjugée du calcul puis utiliser l'identité remarquable a² - b². Après simplification, on calcule la limite en utilisant la composition.

Application : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-5}-x$.

Démonstration :

$$\sqrt{x^2-5}-x=\sqrt{x^2-5}-x\times\frac{\sqrt{x^2-5}+x}{\sqrt{x^2-5}+x}=\frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-5}+x}=\frac{x^2-5-x^2}{\sqrt{x^2-5}+x}=\frac{-5}{\sqrt{x^2-5}+x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-5}=+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ alors par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-5}+x=+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -5=-5\neq 0$ alors par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-5}-x=0$.

4) Méthode : Comment débloquer $"\frac{\infty}{\infty}"$?

Il faut factoriser les « termes prépondérants » du numérateur et du dénominateur (qui ne sont pas forcement des facteurs communs, ni les mêmes) puis il faut simplifier. Ensuite on calcule la limite de chaque facteur, puis du quotient obtenu.

Application : Déterminer a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-12x-15}{x^2-25}$ et b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-6}{x+3}$.

Démonstration :

a) $\frac{3x^2-12x-15}{x^2-25}=\frac{x^2\left(3-\frac{12}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}=\frac{\left(3-\frac{12}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{12}{x}-\frac{15}{x^2}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{25}{x^2}\right)=1$ alors par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-12x-15}{x^2-25}=3$. La droite d'équation y = 3 est asymptote à la courbe en $+\infty$.

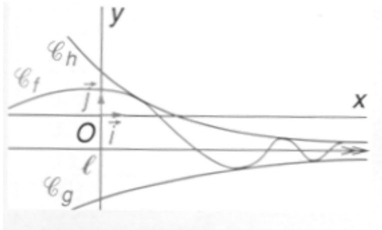
b) $\frac{x^2-x-6}{x+3}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)=1>0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=1>0$ alors par produit et quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-6}{x+3}=-\infty$.

6 – THÉORÈMES DE COMPARAISON : Dans ce paragraphe a est un nombre fini ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Principe : Certaines limites ne sont pas calculables directement. Alors on va comparer la fonction étudiée, à d'autres fonctions qui ont des limites connues.

1) Théorème des gendarmes : (pour une limite finie)

Soit L un nombre réel. Si pour tout réel x « voisin de a », $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.



Méthode : Comment utiliser le théorème des gendarmes ?

On montre que la fonction f est encadrée entre deux autres fonctions au voisinage de là où tend x. On calcule la limite de la fonction qui est inférieure : elle doit être un nombre réel L. Ensuite, on calcule la limite de la fonction qui est supérieure : elle doit être un nombre réel et valoir aussi L. Dans ce cas, le théorème nous dit que f admet une limite qui vaut L.

Application : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\sin x}{2+x}$:

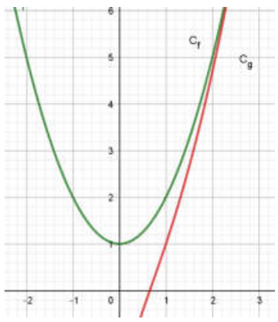
Démonstration : Pour tout x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $2 \leq 3+\sin x \leq 4$. Comme 2 + x > 0 à l'infini, $\dfrac{2}{2+x} \leq \dfrac{3+\sin x}{2+x} \leq \dfrac{4}{2+x}$.

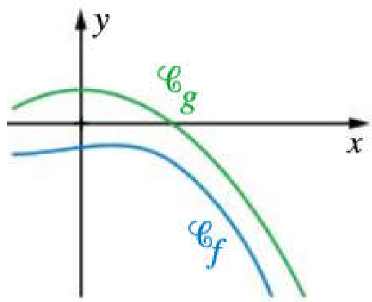
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2+x = +\infty$ donc par inversion, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{2+x} = 0$ alors selon le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\sin x}{2+x} = 0$. La droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe en $+\infty$.

2) Comparaison à une limite infinie : (pour une limite infinie)

Si pour tout réel x « voisin de a », $g(x) \leq f(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Si pour tout réel x « voisin de a », $f(x) \leq g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.





Méthode : Comment trouver une limite par comparaison à une limite infinie ?

On montre que la fonction f est supérieure à une autre fonction g. On calcule la limite de g et celle-ci est $+\infty$. Alors g entraine f et f va vers $+\infty$.
On montre que la fonction f est inférieure à une autre fonction g. On calcule la limite de g et celle-ci est $-\infty$. Alors g entraine f et f va vers $-\infty$.

Application : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x$.

Démonstration : Pour tout x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$. On va utiliser que $x-1 \leq x+\sin x$ pour tout x. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ alors par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x = +\infty$.

Remarque générale : Ces théorèmes ne sont pas très compliqués à utiliser. La différence entre les deux tient dans le fait que le théorème des gendarmes concerne des limites finies alors que le deuxième théorème concerne des limites infinies. Nous nous rendrons compte que la principale difficulté de ces résultats sera surtout d'établir les inégalités entre les fonctions, car cela demandera de connaitre les nombreuses règles de comparaisons des expressions algébriques.

7 – Croissance comparée avec la fonction exponentielle et la fonction logarithme :

<u>Principe</u> : Certaines formes indéterminées s'apprennent car elles sont usuelles et se démontrent autrement. Voici trois formes indéterminées à connaitre concernant la fonction exponentielle.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et plus généralement, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ et plus généralement, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n e^x=0$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$; plus généralement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$.

e) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$; plus généralement, $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$.

f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$; de même $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

8 – Étude des branches infinies :

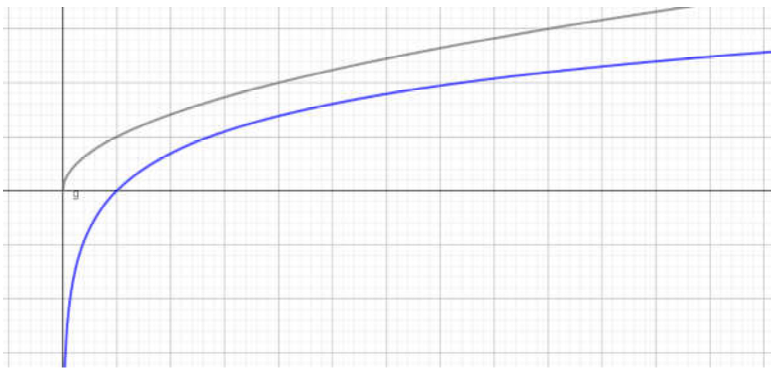
1) <u>Contexte</u> : L'étude des branches infinies d'une courbe sera demandée quelquefois dans les sujets. Il s'agit de déterminer le comportement de la courbe lorsque les abscisses tendent vers l'infini et que la limite obtenue est infinie. Comme il peut y avoir plusieurs comportements différents, une étude par disjonction des cas s'impose.

Donc une étude des branches infinies n'a de sens que si le domaine de la fonction possède au moins une borne infinie et qu'en étudiant les limites de la fonction vers cette borne, nous avons obtenu $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

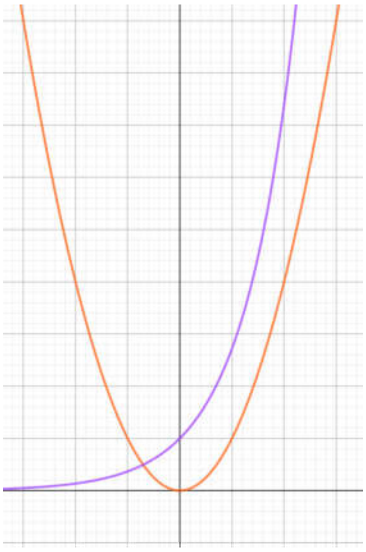
Attention, il est évident que si le domaine D ne comporte que la borne $+\infty$, il est absolument inutile d'étudier une branche infinie en $-\infty$ et vice-versa.

2) <u>Démarche</u> : Il faut calculer la limite à l'infini de $\dfrac{f(x)}{x}$. Comme il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$, il est nécessaire de la débloquer. Selon la limite finale obtenue, nous avons plusieurs conclusions possibles.

a) <u>La limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ est égale à 0</u> : Si nous obtenons $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ alors la courbe Cf admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en + ou – l'infini.
La courbe se comporte comme une branche de parabole dans la direction de l'axe des abscisses et elle s'éloigne de cet axe avec la progression de x vers l'infini.
Les exemples types à retenir sont le cas de la courbe de la fonction racine carrée ou celui de la courbe de la fonction ln, en $+\infty$.

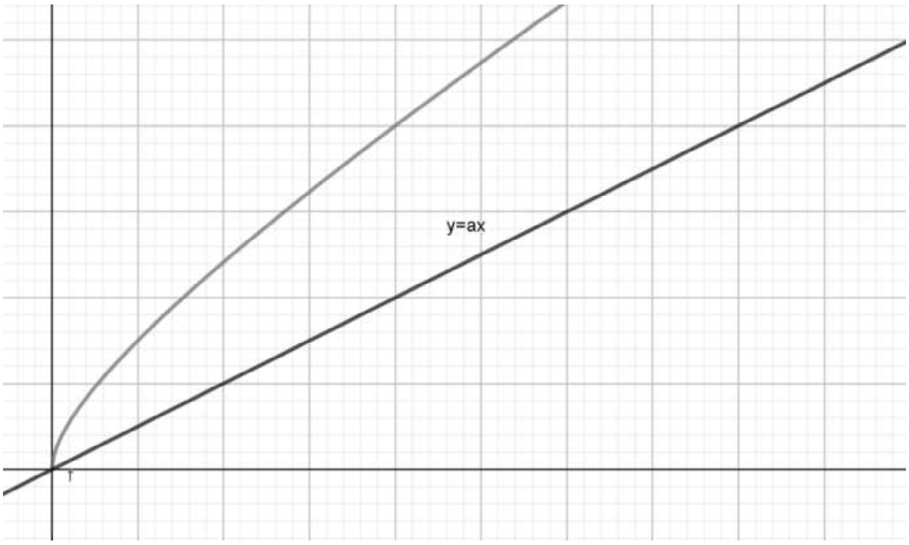


b) <u>La limite de $\frac{f(x)}{x}$ est infinie</u> : Si nous obtenons $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la courbe Cf admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. En + ou – l'infini.
La courbe se comporte comme une branche de parabole dans la direction de l'axe des ordonnées et elle s'éloigne de cet axe avec la progression de x vers l'infini.
Les exemples types à retenir sont le cas de la courbe de la fonction carrée (en $+\infty$ et $-\infty$) ou celui de la courbe de la fonction exp (en $+\infty$).

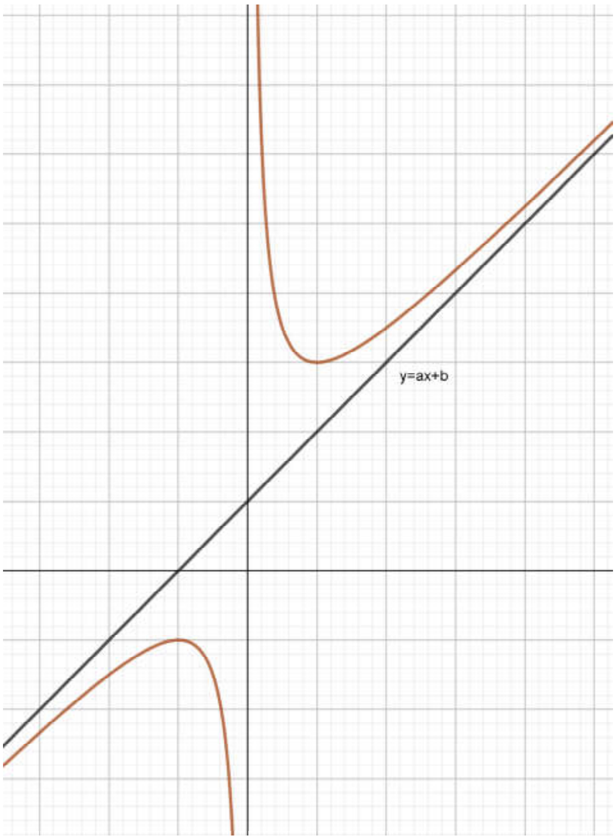


c) <u>La limite de $\frac{f(x)}{x}$ est un réel non nul</u> : Si nous obtenons $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ alors la méthode se poursuit. Nous devons alors calculer une nouvelle limite à l'infini, celle de $f(x) - ax$, et en fonction du résultat nous avons plusieurs conclusions possibles.

i) <u>La limite de $f(x) - ax$ est infinie</u> : Si nous obtenons $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors la courbe Cf admet une direction asymptotique ou branche parabolique de direction la droite d'équation y = ax. En + ou – l'infini.
La courbe se comporte comme une branche de parabole dans la direction de la droite d'équation y = ax et elle s'éloigne de cet axe avec la progression de x vers l'infini.



ii) La limite de $f(x) - ax$ est un réel quelconque : Si nous obtenons $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ alors la courbe Cf admet une asymptote oblique d'équation y = ax + b en $\pm\infty$. La courbe se rapproche de la droite d'équation y = ax + b lorsque x va vers l'infini.

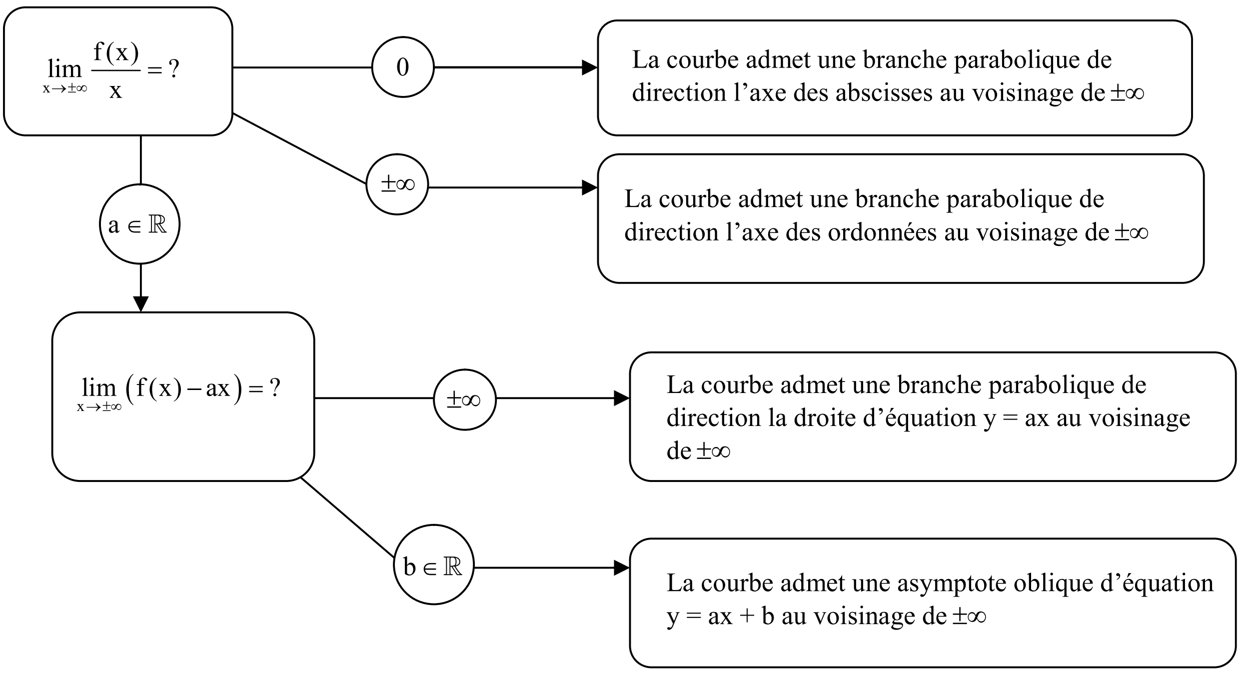


3) Méthode alternative : Si l'énoncé nous donne l'équation y = ax + b d'une droite et nous demande de prouver que cette droite est une asymptote oblique à la courbe, la méthode consiste à calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b)$ et à montrer que cette limite est nulle.

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, la droite d'équation y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe en + ou – l'infini.

9 – Carte mentale pour les branches infinies :

Nous avons tout d'abord montré que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.



Méthode : Comment étudier les branches infinies d'une fonction ?

Tout d'abord, il faut avoir montré que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. Ensuite, on réalise les étapes de la carte mentale précédente pour pouvoir conclure.

Application : Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

a) f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}+\ln(x)$; b) g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^2+x\ln(x)}{x+1}$.

Démonstration :

a) L'étude se fait en $+\infty$. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Nous pouvons étudier les branches infinies. Pour tout x > 0, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x}+\ln(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln(x)}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc par somme, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.

b) L'étude se fait en $+\infty$. Il y a une forme indéterminée. Alors pour tout $x\neq 0$, $g(x)=\dfrac{x\left(x+\ln(x)\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{x+\ln(x)}{1+\frac{1}{x}}$.

$\lim_{x\to+\infty} x+\ln(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$. Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Nous pouvons étudier les branches infinies.

Pour tout x > 0, $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{x+\ln(x)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1+\frac{\ln(x)}{x}}{1+\frac{1}{x}}$.

$\lim_{x\to+\infty} 1+\dfrac{\ln(x)}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ donc par quotient, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$. On continue la procédure.

On calcule pour tout x > 0, $g(x)-x=\dfrac{x^2+x\ln(x)}{x+1}-x=\dfrac{x^2+x\ln(x)-x^2-x}{x+1}=\dfrac{x\ln(x)-x}{x+1}=\dfrac{x\left(\ln(x)-1\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{\ln(x)-1}{1+\frac{1}{x}}$.

$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-1=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ donc par quotient, $\lim_{x\to+\infty} g(x)-x=+\infty$.

La courbe de g admet une branche parabolique de direction la droite d'équation y = x en $+\infty$.