Exercices sur les Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Exercice de rappels sur les équations différentielles :

Exercice 1 : solutions particulières.

1) Soit l'équation différentielle $y' - xy^2 = 0$ définie sur l'ensemble des réels. Montrer que la fonction définie pour tout x par $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+3}$ est une solution de cette équation.

2) Soit l'équation différentielle $x^2y' + (x-1)y = 2x^2 - x$ définie sur l'ensemble des réels. Déterminer les réels a et b pour que $h : x \mapsto ax + b$ soit une solution de cette équation.

Exercice 2 : résolutions.

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = 8x + 1$. b) $y' = 6x^2 + 8x$. c) $y'' = 6x + 2$

d) $2y' - 5y = 0$. e) $y' + \ln(2)y = 0$.

f) $y'' = 2y' + 3y$ g) $y'' - 2y' = -y$

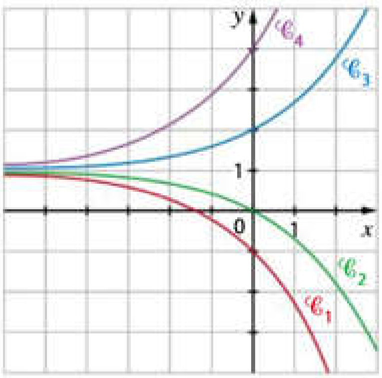
2) Déterminer la solution unique de chacune de ces équations différentielles :

a) $2y' - 3y = 0$ et $f(4) = 2$. b) $2y' = 5y$ et $f'(0) = 5$.

c) $2y' + 6y = 1$ dont la courbe passe par le point A(2 , 0).

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$. e) $y'' - 4y' + 3y = 0$ avec $y(0) = y(1) = 1$.

3) Les courbes ci-dessous représentent quatre solutions de l'équation différentielle $2y' = y - 1$.



Donner des équations des courbes $\mathscr{C}1$, $\mathscr{C}2$, $\mathscr{C}3$ et $\mathscr{C}4$.

Exercice 3 : résolutions avec second membre.

1) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

a) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de (E).

b) En déduire toutes les solutions de (E).

2) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 4y = 3xe^{2x}$.

a) Déterminer a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)e^{2x}$ soit une solution particulière de (E).

b) En déduire toutes les solutions de (E).

3) Résoudre $y'' - 2y' + y = x$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

4) Résoudre $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$.

5) Résoudre $y'' - y = e^{2x} - e^{x}$.

Résolutions de systèmes où la matrice A est diagonalisable :

Exercice 4 : On considère le système différentiel suivant défini sur $\mathbb{R}$ (S) : $\begin{cases} x' = -2x + 7y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$.

1) Mettre ce système sous forme matricielle. On note A la matrice associée au système.
2) a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que des vecteurs propres associés.
b) En déduire que A est diagonalisable en déterminant une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.
3) Résoudre le système (S).
4) Déterminer la solution telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$.
5) Déterminer l'ensemble des points d'équilibre du système. Raisonner sur la stabilité.

Exercice 5 : On considère le système différentiel suivant défini sur $\mathbb{R}$ (S) : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = -z \end{cases}$.

1) Mettre ce système sous forme matricielle. On note A la matrice associée au système.
2) a) Montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1. On admet qu'il n'y en a pas d'autres.
b) Déterminer des vecteurs propres associés.
c) En déduire que A est diagonalisable en déterminant une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.
3) Résoudre le système (S).
4) Déterminer la solution telle que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et $z(0) = z_0$ où $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
5) a) Déterminer les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que les trajectoires convergent vers (0, 0, 0).
b) Montrer que dans ce cas, les trajectoires sont linéaires.

Exercice 6 : On considère le système différentiel suivant défini sur $\mathbb{R}$ (S) : $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = x - 3y \end{cases}$.

1) Mettre ce système sous forme matricielle. On note A la matrice associée au système.
2) a) Montrer que – 2 et – 4 sont des valeurs propres de A associées aux vecteurs propres $u_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_{-4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
b) En déduire que A est diagonalisable en déterminant une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.
3) Résoudre le système (S).
4) Déterminer l'ensemble des points d'équilibre du système. Raisonner sur la stabilité.

Exercice 7 : On considère le système différentiel suivant défini sur $\mathbb{R}$ (S) : $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - x_3(t) + t \\ x_2'(t) = -x_2(t) + x_3(t) + e^t \\ x_3'(t) = x_2(t) - x_3(t) - 1 \end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} - \frac{5}{3}e^t \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}$ est une solution particulière du système (S).

2) Soit (S_0) le système homogène provenant de (S). Mettre (S_0) sous forme matricielle. On note A la matrice associée à (S_0).

3) a) Montrer que les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres que l'on déterminera.
b) En déduire que A est diagonalisable en déterminant une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.
4) a) Résoudre le système (S_0).
b) Déterminer les trajectoires de (S_0) qui aboutissent à un point d'équilibre.
5) Déterminer les solutions du système (S).

Exercice 8 : On considère la système (S) défini sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 6x_1 - 11x_2 + 6x_3 \end{cases}$.

1) Résoudre le système (S).
2) Déterminer la solution qui vérifie $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Trajectoires :

Exercice 9 :

1) $\begin{pmatrix} 4C_1e^{t} + 5C_2e^{2t} + C_3 \\ C_1e^{t} - 6C_2e^{2t} + 2C_3 \\ 2C_1e^{t} + 2C_2e^{2t} - 4C_3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4C_1e^{-t} + 5C_2e^{-2t} - C_3 \\ C_1e^{-t} - 6C_2e^{-2t} + 5C_3 \\ 2C_1e^{-t} + 2C_2e^{-2t} + 2C_3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4C_1e^{t} + 5C_2e^{-2t} - 2C_3 \\ C_1e^{t} - 6C_2e^{-2t} - C_3 \\ 2C_1e^{t} + 2C_2e^{-2t} + 3C_3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4C_1e^{-t} + 5C_2e^{-2t} - 2C_3e^{-3t} \\ C_1e^{-t} - 6C_2e^{-2t} - C_3e^{-3t} \\ 2C_1e^{-t} + 2C_2e^{-2t} + 3C_3e^{-3t} \end{pmatrix}$

Voici différentes trajectoires X(t) de systèmes différentiels définies pour $t \in \mathbb{R}$, où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour chacune :

a) Déterminer l'ensemble des trajectoires qui convergent vers un point d'équilibre.
b) Déterminer parmi elles, celle qui convergent vers (0, 0, 0).
c) Déterminer l'ensemble de tous les points d'équilibre.

Résolutions de systèmes où la matrice A n'est pas diagonalisable :

Exercice 10 : On considère le système différentiel suivant défini sur $\mathbb{R}$ (S) : $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$.

1) Mettre ce système sous forme matricielle. On note A la matrice associée au système.
2) a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que des vecteurs propres associés.
b) A est-elle diagonalisable ?
c) Si on note u un vecteur propre de la question 2) a), déterminer un vecteur v de $\mathbb{R}^2$ tel que $Av = -3v + u$ et tel que (u, v) forme une base de $\mathbb{R}^2$. On note P la matrice de passage de la base canonique à cette base.
d) Déterminer alors la matrice T telle que $T = P^{-1}AP$.

3) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ où $X = PY$ Montrer que le système (S) se ramène au système $(\overline{S})$: $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 \\ y_2' = -3y_2 \end{cases}$ défini sur $\mathbb{R}$.

4) Résoudre l'équation différentielle : $y_2' = -3y_2$.

5) On considère l'équation différentielle $y_1' = -3y_1 + y_2$ d'inconnue y_1 dans laquelle on remplace y_2 par l'expression du 4).

Dans cette situation, y_2 est un second membre et l'équation homogène associée est $y_1' = -3y_1$.

a) Résoudre l'équation différentielle : $y_1' = -3y_1$.

b) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = C_2te^{-3t}$, où $C_2 \in \mathbb{R}$ provient de y_2, est une solution particulière de l'équation différentielle $y_1' = -3y_1 + y_2$ d'inconnue y_1, définie sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y_1' = -3y_1 + y_2$ d'inconnue y_1.

6) Donner alors les solutions du système $(\overline{S})$ puis du système (S).

7) Déterminer la solution telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$.

EXERCICE 11 : On considère le système différentiel suivant défini sur $\mathbb{R}$ (S) : $\begin{cases} x_1'(t)+x_2(t)+2x_3(t)=0 \\ x_2'(t)-x_1(t)-x_3(t)=0 \\ 5x_3'(t)+6x_1(t)-8x_2(t)=0 \end{cases}$.

1) Mettre ce système sous forme matricielle. On note A la matrice associée au système.

2) a) Montrer -2 et 1 sont des valeurs propres de A associées aux vecteurs propres $u=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. On admettra qu'il n'y a pas d'autre valeur propre.

b) Déterminer la dimension des sous-espaces propres. A est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ tel que $Aw=w+v$ et tel que (u,v,w) forme une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base canonique à cette base.

b) Déterminer alors la matrice T telle que $T=P^{-1}AP$.

3) Soit $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ où $X=PY$ Montrer que le système (S) se ramène au système $(\overline{S}) : \begin{cases} y_1'=-2y_1 \\ y_2'=y_2+y_3 \\ y_3'=y_3 \end{cases}$ défini sur $\mathbb{R}$.

4) Résoudre les équations différentielles : $y_1'=-2y_2$ et $y_3'=y_3$.

5) On considère l'équation différentielle $y_2'=y_2+y_3$ d'inconnue y_2 dans laquelle on remplace y_3 par l'expression du 4). Dans cette situation, y_3 est un second membre et l'équation homogène associée est $y_2'=y_2$.

a) Résoudre l'équation différentielle : $y_2'=y_2$.

b) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=C_3te^t$, où $C_3\in\mathbb{R}$ provient de y_3, est une solution particulière de l'équation différentielle $y_2'=y_2+y_3$ d'inconnue y_2, définie sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y_2'=y_2+y_3$ d'inconnue y_2.

6) Donner alors les solutions du système $(\overline{S})$ puis du système (S).

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE P :

EXERCICE 12 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système $X'=AX$ où $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\-12 & -7\end{pmatrix}$

EXERCICE 13 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système $X'=AX$ où $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\-4 & 4\end{pmatrix}$.

EXERCICE 14 : Considérons l'équation différentielle (E) : $y'''-2y''-y'+2y=t$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Soit l'équation homogène (E_0) : $y'''-2y''-y'+2y=0$.

a) Mettre cette équation sous la forme d'un système différentiel linéaire (S_0). On note A sa matrice.

b) On admet que A est diagonalisable, semblable à la matrice $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ grâce à la matrice inversible $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&2\\1&1&4\end{pmatrix}$ telle que $D=P^{-1}AP$. Résoudre le système (S_0).

c) En déduire les solutions de l'équation (E_0) définies sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $f(t)=at+b$ pour $t\in\mathbb{R}$.

3) En déduire les solutions générales de l'équation (E).