EXERCICES SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

QUESTIONS CLASSIQUES

EXERCICE 1 :

1) Soit F la fonction la fonction de répartition d'une variable X, définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 \text{ si } x<1\end{cases}$.

Montrer que X est une variable à densité et déterminer sa densité.

2) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} & \text{si } x>0\\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité. Déterminer la densité.

3) Soit X une variable à densité, donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{t} \text{ si } t\leq 0\\ -t+1 \text{ si } 0<t<1\\ 0 \text{ si } t\geq 1\end{cases}$. Montrer que f est bien une densité puis déterminer la fonction de répartition de X.

4) a) Montrer qu'il existe deux réels c et d tels que pour tout x positif, $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{d}{x+2}$.

b) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ln(2)} & \text{si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$ est une densité puis déterminer la fonction de répartition de X.

5) Soit une variable X à densité dont la densité est donnée par f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|e^{-\frac{x^2}{2}}$. Déterminer $P(-1<X<1)$.

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable X.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4) Montrer que X admet une variance et la calculer.
5) On considère $Y=\lfloor X\rfloor$. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 1\\ 0 \text{ si } x<1\end{cases}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable X.
2) Montrer que X n'admet pas d'espérance.

EXERCICE 4 : LOI DE LAPLACE

On dit que variable aléatoire réelle X suit une loi de Laplace si sa densité f vérifie : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=Ce^{-|x|}$ pour une certaine constante C.

1) Déterminer la valeur de la constante C.
2) Calculer la fonction de répartition associée à F_X.
3) Montrer que X admet une espérance finie et calculer E(X).
4) Montrer que X admet une variance finie et calculer V(X).

Exercice 5 : EML 2002

On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

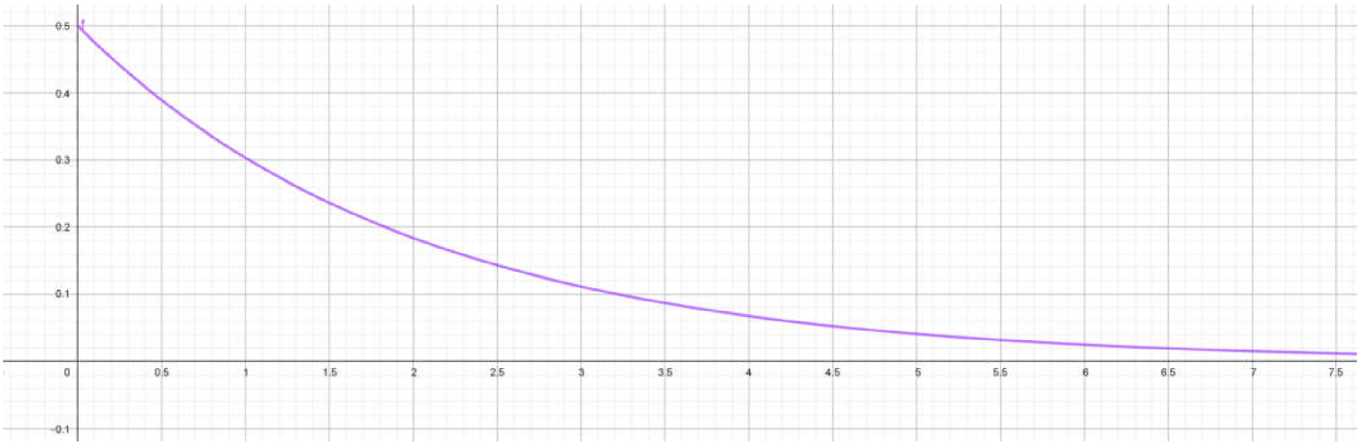
1) a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire à densité, notée Y.
b) Déterminer une densité f de Y.

2) Montrer que Y possède une espérance et calculer E(Y).

Lois usuelles

Exercice 6 :

Voici la représentation graphique de la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$ sur $[0;+\infty[$.



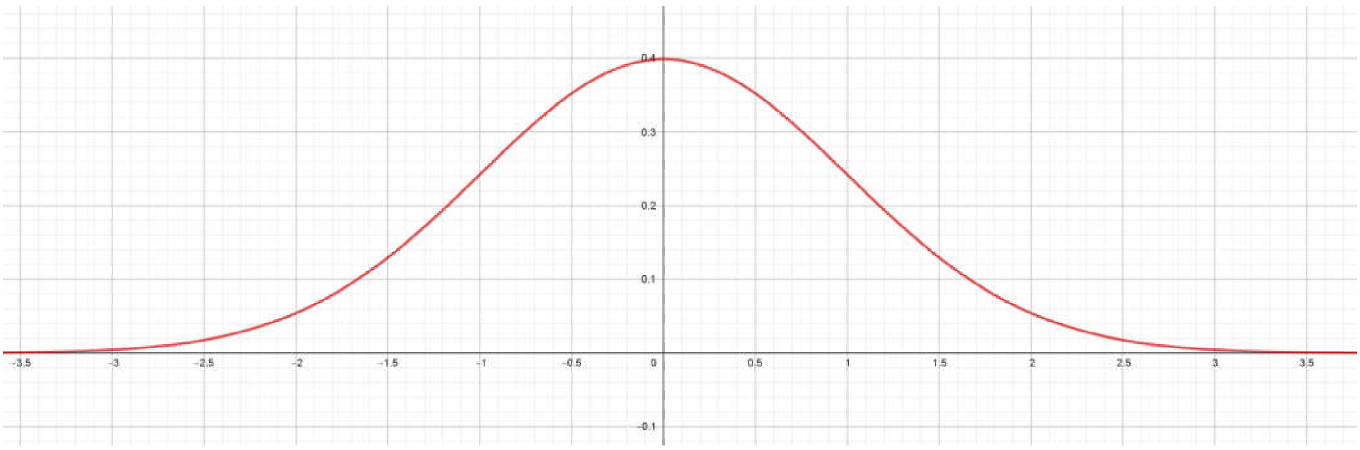
1) Hachurer le domaine qui représente $P(X \leq 1)$.

2) Hachurer le domaine qui représente $P(1,5 < X \leq 2)$.

3) Hachurer le domaine qui représente $P(X > 3)$.

Exercice 7 :

Voici la représentation graphique de la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.
On admet que $P(X < 1) \simeq 0,84$ et $P(X \leq 2) \simeq 0,98$.



1) Hachurer le domaine qui représente $P(X < 1)$.

2) Calculer $P(X \leq 1)$, $P(X > 1)$, $P(X \leq -1)$ et $P(0 \leq X < 1)$.

3) Calculer $P((X \leq 1) \cup (X > 2))$, $P((X \leq 1) \cap (X > 2))$, $P((X \leq 1) \cap (X \leq 2))$, $P((X > 1) \cup (X \leq 2))$, $P(1 < X \leq 2)$ et $P(-2 \leq X < 1)$.

4) Déterminer $P(Y < 10)$ pour Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(8,4)$.

5) Déterminer $P(1 < Z < 13)$ pour Z suivant une loi normale $\mathcal{N}(5,16)$.

Exercice 8 :

Voici la table de la loi normale centrée réduite. On lit $P(Z \leq 1,24) \simeq 0,8925$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Déterminer $P(Z < 3,68)$, $P(Z \geq 0,72)$, $P(1,13 < Z < 2,25)$ et $P(Z < -2,74)$.

Exercices de type concours

Exercice 9 : EML 2006

1) Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

a) Rappeler une densité de U.

b) En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leq 0, \ F(x) = 0 \\ \forall x > 0, \ F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$.

2) Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.
3) Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a) Montrer que X admet une espérance E(X) et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $P(X^2 \leq y)$. On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.

c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance V(X) et calculer V(X).

Exercice 10 : Produit d'une loi continue et d'une loi discrète

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Soit ε une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{-1,1\}$, indépendante de X, c'est-à-dire que, pour tout $k \in \varepsilon(\Omega)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P([\varepsilon = k] \cap [X \leq t]) = P(\varepsilon = k) \times P(X \leq t)$.
On note $Y = \varepsilon X$.
1) Montrer que Y admet une espérance et une variance finies, et les calculer.
2) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(X \leq t) = P(Y \leq t)$. Que peut-on conclure ?
3) Montrer que les variables Y et ε sont indépendantes.

Exercice 11 : edhec 2008

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$ est convergente et donner sa valeur.

2) On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

a) Montrer que f est paire.
b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3) On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P).
a) Déterminer $Y(\Omega)$.
b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 12 : edhec 2012

On désigne par λ, un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$.
1) a) Montrer que f est paire.
b) Etablir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et donner sa valeur.
c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité de probabilité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé (Ω, A, P).
2) a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$.
b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée E(X) et donner sa valeur.
3) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge et donner sa valeur.
b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée V(X) et donner sa valeur.
4) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P).
a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.
c) Retrouver alors sans calcul la valeur de V(X).

Exercice 13 : eml 2007

1) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par : $\begin{cases} f(x) = e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$. Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2) On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

L'événement (Y = 0) est égal à l'événement (X < 1)

Pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement (Y = n) est égal à l'événement $(n \leq X < n+1)$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n : $P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$.

b) Montrer que la variable aléatoire Y + 1 suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y.

3) Soit U une variable de Bernoulli telle P(U = 1) = P (U = 0) = $\frac{1}{2}$.

On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.

Soit la variable aléatoire T = (2U – 1)Y, produit des variables 2U – 1 et Y.

Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

a) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance E(T) et calculer E(T).

b) Vérifier que $T^2 = Y^2$.

En déduire que la variable aléatoire T admet une variance V(T) et calculer V(T).

c) Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité P(T = n).

4) Soit la variable aléatoire D = X – Y. On note F_D la fonction de répartition de D.

a) Justifier : $\forall t \in]-\infty;0[,\ F_D(t) = 0$ et $\forall t \in [1;+\infty[,\ F_D(t) = 1$.

b) Soit $t \in [0;1[$. Exprimer l'événement $(D \leq t)$ à l'aide des événements $(n \leq X \leq n+t)$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Pour tout nombre réel $t \in [0;1[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $P(n \leq X \leq n+t)$.

d) Montrer $\forall t \in [0;1[,\ F_D(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}$.

e) Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.

Exercice 14 : eml

1) Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ est convergente et donner sa valeur.

On note f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} \text{ si } x \geq 2 \\ 0 \text{ si } x < 2 \end{cases}$.

2) Montrer que f définit une densité de probabilité.

3) On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f pour densité.

a) Déterminer la fonction de répartition de X.

b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3, indépendantes, et toutes de même loi que X.

4) On pose $U = \text{Inf}(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.

a) Déterminer la fonction de répartition G de U.

b) Montrer que U est une variable à densité et donner une densité g de U.

c) Montrer que U admet une espérance et calculer E(U).

5) On pose $V = \text{Sup}(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

a) Déterminer la fonction de répartition H de V.

b) Montrer que V est une variable à densité et donner une densité h de V.

c) V admet-elle une espérance ?

Exercice 15 : minimum d'exponentielle

Soit $(X_1, ..., X_n)$ n variable aléatoires indépendantes de loi commune exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) On note $T_n = \min(X_1, ..., X_n)$. Déterminer la loi de T_n , son espérance et sa variance.

2) On note $V_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Déterminer la loi de V_n .

Exercice 16 : d'après edhec 2018 e

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3) On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \frac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On rappelle qu'en Python, la commande numpy.random.exponential($1/\lambda$) simule une variable aléatoire suivant un loi exponentielle de paramètre λ . Écrire un script Python demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4) a) Vérifier que la fonction g, qui a tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a.

c) En déduire que X admet une espérance et la déterminer.

5) a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

b) En déduire que la variance de X est donnée par : $V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}$.

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$. On dit que S_n un estimateur de a.

a) On appelle biais de l'estimateur T_n du paramètre θ , la quantité : $b_{T_n} = E(T_n) - \theta$ et un estimateur est sans biais si son biais est nul. Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.

c) Si un estimateur T_n de θ possède une variance et si b_{T_n} est le biais de T_n alors $r_{T_n}(\theta) = b_{T_n}^2 + V(T_n)$ est le risque quadratique de T_n . De plus, T_n est un estimateur convergent de θ si $\lim\limits_{n \to +\infty} r_{T_n}(\theta) = 0$.

Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a. En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

Exercice 17 : espérance et anti-répartition EDHEC

Partie 1 : Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et de fonction de répartition F. On suppose, de plus, que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est continue. On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x)=\int_0^x tf(t)dt$.

1) Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout réel x positif, on a : $\varphi(x)=\int_0^x [1-F(t)]dt - xP(X>x)$.

2) On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\int_0^{+\infty}[1-F(t)]dt$ converge.

a) Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que φ est majorée et en déduire que X a une espérance.

c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \le xP(X>x) \le \int_x^{+\infty} tf(t)dt$.

d) En utilisant le fait que X a une espérance, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} tf(t)dt = 0$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} xP(X>x)$, puis montrer que : $E(X)=\int_0^{+\infty}[1-F(t)]dt$.

Partie 2 : On considère la fonction F_n définie par : $F_n(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$.

1) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T_n à densité.

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k=\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ est convergente.

b) Etablir que $I_{k+1}=(k+1)I_k$ et en déduire que, pour tout entier naturel k, on a : $I_k=k!$.

3) Utiliser la question 2) pour montrer que T_n a une espérance et que $E(T_n)=\sum\limits_{k=0}^{n} k!\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Exercice 18 : Loi log-normale ESSEC 2012

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et, si X est une variable aléatoire on note F_X sa fonction de répartition. Soit m un réel quelconque et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi log-normale de paramètres (m,σ^2) si la variable aléatoire Y = ln X suit une loi normale de paramètres (m,σ^2). On écrit $X \sim Ln(m,\sigma^2)$.

1) Soit U une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m,σ^2). Montrer que $\forall (a,b)\in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, $T=aU+b$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

2) On suppose dans cette question que m = 0 et que $X \sim Ln(0,\sigma^2)$.

a) Exprimer la fonction de répartition F_X de X en fonction de Φ. En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité de X.

b) Etablir l'existence de E(X) et montrer que : $E(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)\right)dy$.

Puis en effectuant le changement de variable $t=\dfrac{y}{\sigma}-\sigma$, calculer E(X).

c) Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit la loi log-normale dont on précisera les paramètres. En déduire que X admet une variance et que : $V(X)=e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$.

3) On revient au cas général $X \sim Ln(m,\sigma^2)$.

a) Soit μ un réel strictement positif. Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $(m+\ln\mu,\sigma^2)$.

b) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de X et établir les relations : $E(X)=e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$ et $V(X)=e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$.