EXERCICES SUR L'INTÉGRATION GÉNÉRALISÉE À UN INTERVALLE QUELCONQUE

RAPPELS SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES

EXERCICE 1 :

1) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 te^{-t^2}dt$ b) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$ c) $\int_2^e \frac{\ln(t)}{t}dt$ d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1}$ e) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (on pourra poser $u=\sqrt{x+1}$) g) $\int_0^1 (x^2-3x)e^x dx$ h) $\int_{-5}^2 e^{|x-1|}dx$

2) Soit f définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ x \text{ si } x\in \left]0;\frac{1}{3}\right] \\ -2x+1 \text{ si } x\in \left]\frac{1}{3};1\right] \\ 2 \text{ si } x=1 \end{cases}$. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

3) a) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x)=\sqrt{n^2+x^n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Etudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$ en fonction de n.

b) On considère la suite (u_n) définie par pour tout $n\geq 1$ $u_n=\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{n^2+x^n}dx$.

Trouver un encadrement de u_n. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

4) Soit $f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f. En déduire le sens de variation de f.
c) Etudier la parité de f.
d) A l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in\left]0;1\right[$, $\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$. (D'après HEC 2005)

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

EXERCICE 2 : Etudier la convergence des intégrales suivantes.

1) $\int_1^{+\infty}\frac{2}{3x^2+1}dx$ 2) $\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ 3) $\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n t}{(1+t^2)^n}dt,\ n\in\mathbb{N}$ 4) $\int_e^{+\infty}\frac{dt}{\ln(t)}$ 5) $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^2\ln(t)}$. 6) $\int_e^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}\ln(t)}$.

7) $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2-(\ln(t))^2}$ 8) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t(\ln(t))^2}dt$ 9) $\int_0^1\ln(t)dt$ (Hors programme) 10) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ 11) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3(\ln(x))^5}$

12) $\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$ 13) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)}dt$ 14) $\int_0^{+\infty}t^3e^{-t^2}dt$. 15) Calculer $I=\int_1^{+\infty}\frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}dt$ avec $u=\frac{1}{t}$.

EXERCICE 3 : Etudier les séries suivantes grâce à des intégrales.

1) $\sum\frac{1}{n\ln(n)}$ 2) $\sum\frac{1}{n(\ln(n))^2}$

Exercice 4 :

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

1) Exprimer la dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

2) En déduire la convergence puis la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$. (On montrera que $\frac{1}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2}f'(x)$)

Exercices de synthèse ou de type concours :

Exercice 5 : d'après ESSEC

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

1) Etudier la parité de f.
2) a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ et préciser sa valeur.

3) a) Déterminer un équivalent simple de $\frac{x^3e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire que $\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

b) Justifier alors l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$.

c) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ et donner sa valeur.

4) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\ln(2)$.

Exercice 6 :

1) a) Justifier que l'on a : $\frac{\left(\ln(t)\right)^n}{t^3}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{\left(\ln(t)\right)^n}{t^3}dt$.

2) a) Calculer I_0.
b) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
c) En déduire une expression de I_n en fonction de n.

Exercice 7 : d'après ESCP Intégrale gamma

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}dt$, notée I_n, converge.

2) a) Calculer I_0.
b) Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
c) En déduire I_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

3) Utiliser un changement de variable pour calculer la valeur de l'intégrale $J_n=\int_0^{+\infty}t^ne^{-2t}dt$.

Exercice 8 : d'après EDHEC

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1) a) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'intégrale $\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$, notée I_n, converge et exprimer I_n en fonction de n.

b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Montrer que la série de terme général $u_k=f(k)$ converge.

3) a) Etablir que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a : $f(k+1)\le\int_k^{k+1} f(t)\,dt\le f(k)$.

b) En déduire que, pour tout entier n non nul, on a : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\le I_n\le\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k+\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

c) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 : d'après HEC

Pour tout réel a strictement positif, et tout entier naturel n, on pose : $I_n(a)=\int_0^{+\infty} e^{-at}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$.

1) Justifier la convergence de l'intégrale définissant $I_n(a)$.

2) a) Montrer que $I_n(1)=\dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que, pour tout réel a supérieur ou égal à 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)=0$.

3) a) Montrer que pour tout réel a strictement positif, et tout entier naturel n, on a : $(n+1)\left(I_n(a)-I_{n+1}(a)\right)=aI_{n+1}(a)$.

b) En déduire une expression de $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.

Exercice 10 : d'après EDHEC

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\int_0^1\dfrac{dt}{1+t+t^n}$ avec $u_0=\int_0^1\dfrac{dt}{2+t}$.

1) Justifier l'existence de l'intégrale définissant u_n.

2) Calculer u_0 et u_1.

3) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\le\ln(2)$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) a) Pour tout entier naturel n, écrire $\ln(2)-u_n$ sous forme d'une intégrale.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $\ln(2)-u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

c) Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{1+t+t^n}$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $0\le v_n\le\dfrac{1}{n-1}$.

c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\ge2}$ puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{1+t+t^n}$.

Exercice 11 : d'après HEC BL 2013

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant f(0) = 0 et, pour tout réel x : $f'(x) = e^{-xf(x)}$.(*)

On suppose que cette fonction est unique et on ne cherchera pas à la déterminer.

1) Pour tout réel x, on pose : $g(x) = f(x) + f(-x)$, $h(x) = (g(x))^2$ et $\varphi(x) = f(x) - x$;

a) On note g' la fonction dérivée de g. Montrer que, pour tout réel x, $g'(x)$ est du même signe que $-xg(x)$.

b) Etudier les variations de h. En déduire que h est constante sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que la fonction f est impaire.

d) On note φ' et φ'' les dérivées première et seconde de la fonction φ ; après avoir justifié leur existence, déterminer le signe de $\varphi''(x)$ pour tout réel positif. En déduire que pour tout réel x, f(x) = x implique x = 0.

2) Variation de f.

a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-xf(x)}dx$ est convergente.

b) A l'aide de la relation (*), en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$.

On pose désormais $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Démonstration d'inégalités :

a) Etablir, pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité suivante : $\int_0^x e^{-tf(t)}dt \geq \int_0^x e^{-\lambda t}dt$.

b) En déduire que pour tout réel x positif : $f(x) \geq \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)$.

c) Montrer que $\lambda \geq 1$.

4) Encadrement de la limite de f en $+\infty$:

a) Soit a un réel strictement positif ; établir, pour tout réel $x \in [a; +\infty[$, l'inégalité suivante : $f(x) - f(a) \leq \int_a^x e^{-tf(a)}dt$.

b) En déduire que, pour tout réel $x \in [a; +\infty[$, on a : $f(x) \leq f(a) + \dfrac{e^{-af(a)}}{f(a)}$.

c) On suppose que $\lambda > 1$. Etablir l'existence d'un unique réel a > 0 tel que $f(a) = 1$.

d) En déduire que $\lambda < 2$.

5) Etude d'une suite :

Soit b un réel strictement positif et (x_n) une suite définie par : $\begin{cases} x_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$.

a) Montrer que la suite (x_n) est strictement positive et décroissante.

b) En déduire qu'elle est convergente : soit L sa limite.

c) Déterminer la valeur de L.

d) Etablir l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x_n}\right) \leq x_{n+1} \leq x_n$.

e) Montrer finalement que x_{n+1} est équivalent à x_n lorsque n tend vers $+\infty$.