EXERCICES SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES DE DEUX VARIABLES RÉELLES

REPRÉSENTATION, EXISTENCE DE FONCTIONS À DEUX VARIABLES

EXERCICE 1 : Représenter graphiquement les parties du plan définie par :

1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\le x\le y\}$; 2) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\ge 1,\ y\ge 0,\ y+x-3\ge 0\}$;

3) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\ge 0,\ y\ge 0,\ 3y+x-12\le 0,\ 3x+y-12\le 0\}$ 4) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\ge 0,\ y<0,\ y>2x^2-8\}$

EXERCICE 2 : On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x<0\}$; $E_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\}$; $E_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2>1\}$

1) Représenter ces 3 parties du plan.

2) Montrer que E_1 et E_3 sont ouvertes et que E_2 est fermée.

3) Quelles sont les parties bornées ?

EXERCICE 3 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f:(x,y)\mapsto \ln(xy)+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2y+\frac{x^2}{2}$ 2) $g:(x,y)\mapsto\sqrt{4-x^2-y^2}$. 3) $h:(x,y)\mapsto x^y$.

EXERCICE 4 : Déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes après avoir précisé les ensembles de définition des fonctions :

1) $f:(x,y)\mapsto x^2-4x+y^2-3y$. Lignes f(x,y) = k où $k\in\mathbb{R}$. 2) $g:(x,y)\mapsto xy$. Ligne : g(x,y) = 2.

3) $h:(x,y)\mapsto xy^2$. Ligne : h(x, y) = 1. 4) $i:(x,y)\mapsto x-\ln(y)$. Ligne : i(x, y) = 3.

ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ

EXERCICE 5 : Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 2) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

EXERCICE 6 :

1) Soit f définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f n'est pas continue en (0, 0).

2) Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit f définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que f n'est pas continue en (0, 0).

DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE 1 ET 2

EXERCICE 7 : On considère la fonction f définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

EXERCICE 8 : Pour chacune des fonctions suivantes, exprimer, si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de Ω.

1) $f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right),\ \Omega=]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

2) $f(x,y)=xye^{x^2y},\ \Omega=\mathbb{R}^2$.

3) $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\ \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ xy\neq 0\}$

4) $f(x,y)=\sqrt{xy},\ \Omega=[0;+\infty[\times[0;+\infty[$.

5) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y-y^2x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \Omega=\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 9 :
Ecrire le développement limité de f à l'ordre 1 au point (2, 1) où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=xe^{x-2y}$.

EXERCICE 10 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^{3.}+2xy+y^3+2x$.

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
2) Déterminer le gradient et la matrice hessienne de f au point (1, 1).
3) Ecrire les développements limités à l'ordre 1 et 2 de f au point (1, 1).

EXERCICE 11 :
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=y^2x+(1+y)e^x$. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point (0, 0).

EXTREMA DE FONCTIONS À DEUX VARIABLES

EXERCICE 12 :
Une fonction f, de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ contenant le point (a, b) tel que $f(a,b)=\partial_1 f(a,b)=\partial_2 f(a,b)=0$ et :

1) $\partial_{1,1}^2(a,b)=3$; $\partial_{1,2}^2 f(a,b)=\partial_{2,1}^2 f(a,b)=1$; $\partial_{2,2}^2 f(a,b)=2$.
2) $\partial_{1,1}^2 f(a,b)=-1$; $\partial_{1,2}^2 f(a,b)=\partial_{2,1}^2 f(a,b)=2$; $\partial_{2,2}^2 f(a,b)=-4$.
3) $\partial_{1,1}^2 f(a,b)=0$; $\partial_{1,2}^2 f(a,b)=\partial_{2,1}^2 f(a,b)=-2$; $\partial_{2,2}^2 f(a,b)=a$.

Dans chacun des cas, préciser, si possible, si (a, b) est un point selle ou si f(a, b) est un extremum.

EXERCICE 13 :
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer, s'il y a lieu, ses extrema sur l'ouvert Ω.

1) $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+x^2+\frac{y^3}{3}-4y,\ \Omega=\mathbb{R}^2$.

2) $f(x,y)=y^2+xy\ln x,\ \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x>0\}$.

3) $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2},\ \Omega=\mathbb{R}^2$.

4) $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2,\ \Omega=\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 14 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les extrema de f sur l'ensemble fermé borné.

1) $f(x,y)=x^2+y^2-x-y,\ \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ |x|\leq 1,|y|\leq 1\}$.

2) $f(x,y)=x^2+2y^2,\ \Omega=D_f\{(0,0),1\}$.

EXERCICE 15 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=9x^2+8xy+3y^2+x-2y$.

1) Montrer que f admet un seul extremum local sur $\mathbb{R}^2$. Quel est sa nature ?

2) a) Calculer $f\left(-\frac{1}{2},1\right)$ et retrouver le résultat de la question précédente en développant $3\left(y+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

b) Quelle information supplémentaire cela nous apporte-t-il ?

EXERCICE 16 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$.

1) Montrer que f admet exactement deux points critiques que l'on déterminera.

2) Montrer que f admet un seul extremum local. Préciser si c'est un maximum ou un minimum et donner sa valeur.

3) L'extremum trouvé à la question précédente est-il global ? (On pourra s'aider de la fonction $y\mapsto f(0,y)$.

EXERCICES DE SYNTHÈSE ET DE TYPE CONCOURS

EXERCICE 17 : D'APRÈS ECRICOME

On considère la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=x^2-x\ln x-1$ et $f(0)=-1$ ainsi que la fonction g définie par :

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=xe^y-ye^x$.

1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.

c) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+$.

d) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) a) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g.

b) Montrer que si g admet un extremum local (a, b) de $\mathbb{R}^2$ alors : ab = 1 et $a=e^{a-\frac{1}{a}}$.

En déduire nécessairement : a > 0 et f(a) = 0.

c) Etablir que le seul point où g peut admettre un extremum est le couple (1, 1).

d) Calculer les réels $\partial^2_{1,1}g(1,1)$, $\partial^2_{1,2}g(1,1)$ et $\partial^2_{2,2}g(1,1)$.

e) La fonction g admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 18 : EML 2015

Dans cet exercice, on pourra utiliser l'encadrement suivant : 2 < e < 3.

Partie I : Etude d'une fonction

On considère l'application $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\varphi(x)=x^2e^x-1$.

1) Déterminer le tableau de variation de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2) Etablir que l'équation $e^x=\dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x\in\left]0;+\infty\right[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

On considère l'application f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)=x^3e^x$ et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite.

3) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 1$.

4) Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5) Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Etude d'une série

6) Montrer que la série $\sum_{n\geq1}\dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{f(n)}$.

7) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|S-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f(k)}\right|\leq\dfrac{1}{(e-1)e^n}$.

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables.

On considère l'ouvert $U=\left]0;+\infty\right[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe C^2 suivante :

$g:U\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto g(x,y)=\dfrac{1}{x}+e^x-y^2e^y$.

8) Représenter graphiquement l'ensemble U.

9) Calculer pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x, y).

10) Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.

11) Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

12) Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

13) Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

Exercice 19 : d'après EML 2003

On note e = exp(1) et $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$. On considère l'application $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ g(x, y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}.$$

1) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer qu'il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, et calculer ce couple.

4) Est-ce que g admet un extremum ?

Exercice 20 : d'après ECRICOME 2008

On considère les fonctions suivantes : $g(x, y) = 1 + \ln(x + y)$ (fonction des variables x et y) et pour $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(x) = g(x, p)$ (famille de fonctions de la variable réelle x).

On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p .

1) Recherche d'extremum éventuel de la fonction g

a) Représenter, relativement à un repère orthonormé du plan, le domaine de définition D de la fonction g. On hachurera D. On admet que cet ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer sur D les dérivées partielles premières de g. La fonction admet-elle un extremum sur D ?

2) Etude de la fonction f_1

a) Donner le domaine de définition de f_1 .

b) Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de la fonction f_1 .

c) En déduire une équation de la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0, et la position locale de la courbe (C_1) par rapport à cette tangente.

Exercice 21 : d'après EDHEC 2010

On considère la fonction f définie pour tout couple (x, y) de l'ouvert $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ par : $f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

1) Montrer que pour tout couple (x, y) de $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ on a : $f(x, y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ et $f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}$.

2) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

3) Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

5) a) Comparer les réels $(x + y)^2$ et $4xy$.

b) En déduire que f admet sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.

6) Soit g la fonction définie pour tout (x, y) de $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, par $g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln x - \ln y$.

Montrer que : $\forall (x, y) \in]0;+\infty[\times]0;+\infty[,\ g(x, y) \geq 2\ln 2$. Conclusion ?