Étude des suites

1 – définitions : (rappels)

1) Notion de suite : Soit n_0 un entier naturel. Une suite numérique est une fonction u définie sur un intervalle infini d'entiers naturels. Donc à tout entier naturel $n \geq n_0$, est associé un nombre réel noté u_n .
On peut dire aussi que c'est une liste infinie de nombres réels dont chaque terme u_n est numéroté par son indice (ou rang) n.

2) Remarques : Dans la majorité des situations, le rang de démarrage n_0 vaut 0 ou 1.
Ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ (tous les nombres qui la composent) avec le terme de rang n nommé u_n (un seul terme).
On dit aussi que u_n est le terme général en fonction de n de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.
Si on considère u_n le terme de rang n, alors le terme précédent est u_{n-1} et le terme suivant est u_{n+1}. Ces trois termes sont consécutifs.

2 – Les différentes manières de générer une suite : (rappels)

1) Suite définie par une formule explicite : Il existe une fonction f définie sur $[n_0;+\infty[$ (intervalle réel) telle que $u_n = f(n)$. La suite est explicitement définie grâce à la fonction f donc de nombreuses propriétés de f peuvent donner directement des propriétés de la suite.

Remarque : N'importe quel terme d'indice n peut être calculé directement en remplaçant n dans l'expression de la fonction.

2) Suite définie par une relation de récurrence : Il existe une fonction f définie sur un intervalle I telle que pour tout x de I, f (x) est aussi dans I $(f(I) \subseteq I)$ et il existe un réel a appartenant à I tels que la suite soit définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Remarque : La fonction f est appelée fonction de transfert.
Le premier terme étant donné, chaque terme se calcule à partir du terme de rang précédent donc la propriété de stabilité de l'image de la fonction $(f(I) \subseteq I)$ est importante pour générer entièrement la suite.
Pour calculer n'importe quel terme de rang n, il faut obligatoirement tous les termes précédents.
Attention, les propriétés de la fonction ne se transmettent pas directement à la suite.

Méthode : Comment calculer des termes d'une suite explicite et d'une suite récurrente ? Comment représenter les termes d'une suite dans un graphique ?

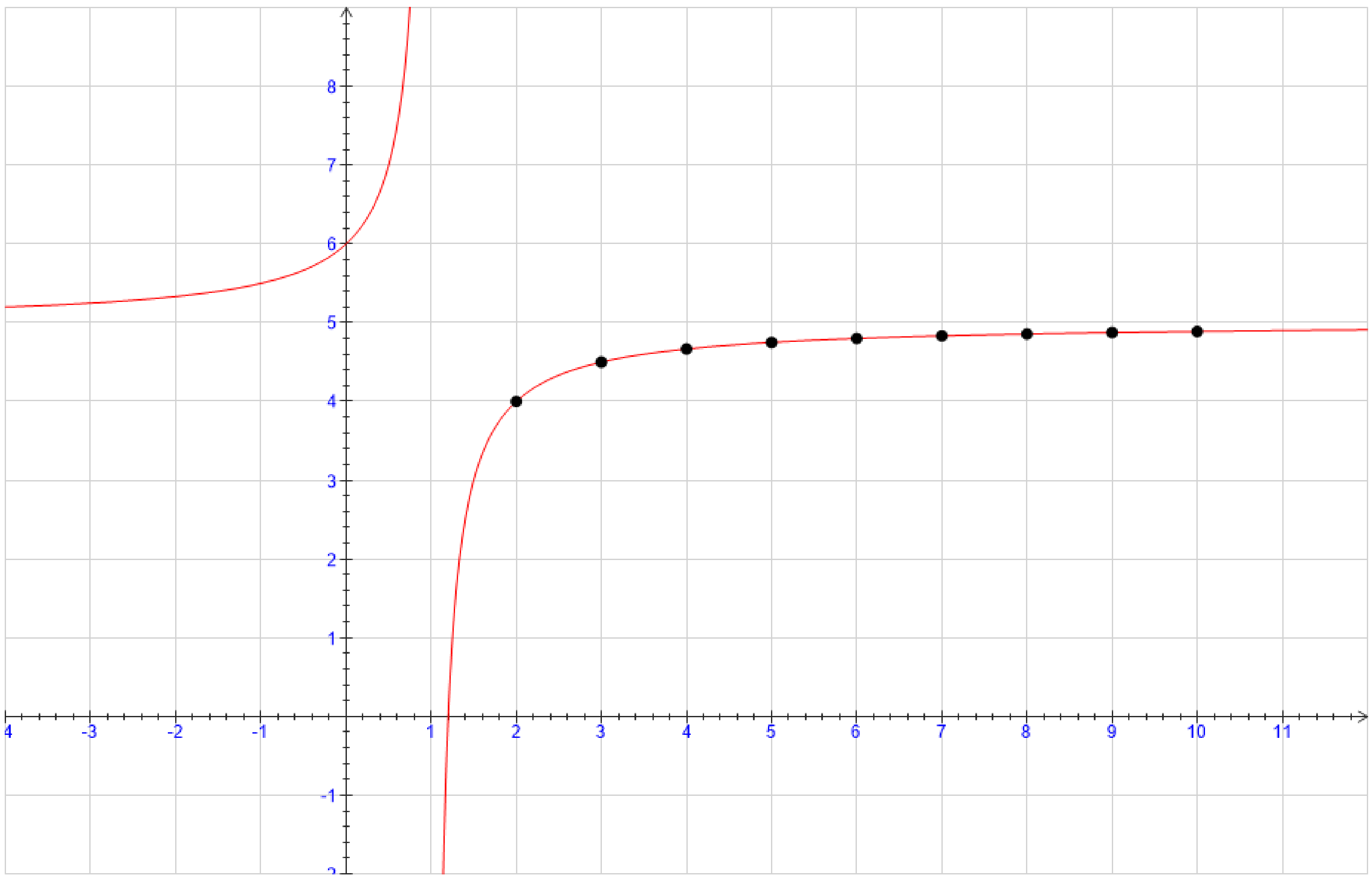
Suite explicite : Pour calculer les termes, il suffit de remplacer le rang n par la valeur voulue et de simplifier les calculs.
Pour représenter les termes, on construit un repère avec les rangs en abscisse et les termes en ordonnée et on place les points. Attention, il ne faut pas les relier. Si la courbe de f est déjà tracée, il suffit de représenter les points d'abscisses entières.

Suite par récurrence : Pour calculer un terme de rang donné, il faut remplacer la variable de la fonction par le terme précédent. On démarre donc à partir du premier terme et on les calcule tous jusqu'à arriver à celui voulu.
Pour représenter les termes, on peut utiliser indifféremment chacun des axes. Par contre, on placera le terme précédent sur l'axe des abscisses et le terme suivant sur l'axe des ordonnées par commodité. Une fois le premier terme placé sur l'axe des abscisses, on construit le terme suivant comme image par f sur l'axe des ordonnées. Cette image doit désormais devenir une abscisse. Pour cela, on trace la droite diagonale d'équation y = x et on renvoie l'image sur l'axe des abscisses. On réitère le procédé. Penser à la rengaine « la courbe-la droite ; la courbe-la droite ».

Application avec l'utilisation de la même fonction : f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{5x-6}{x-1}$.

a) Suite définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$: Déterminer l'expression de u_n, le premier rang et calculer u_3, u_{10}, u_{1000}.

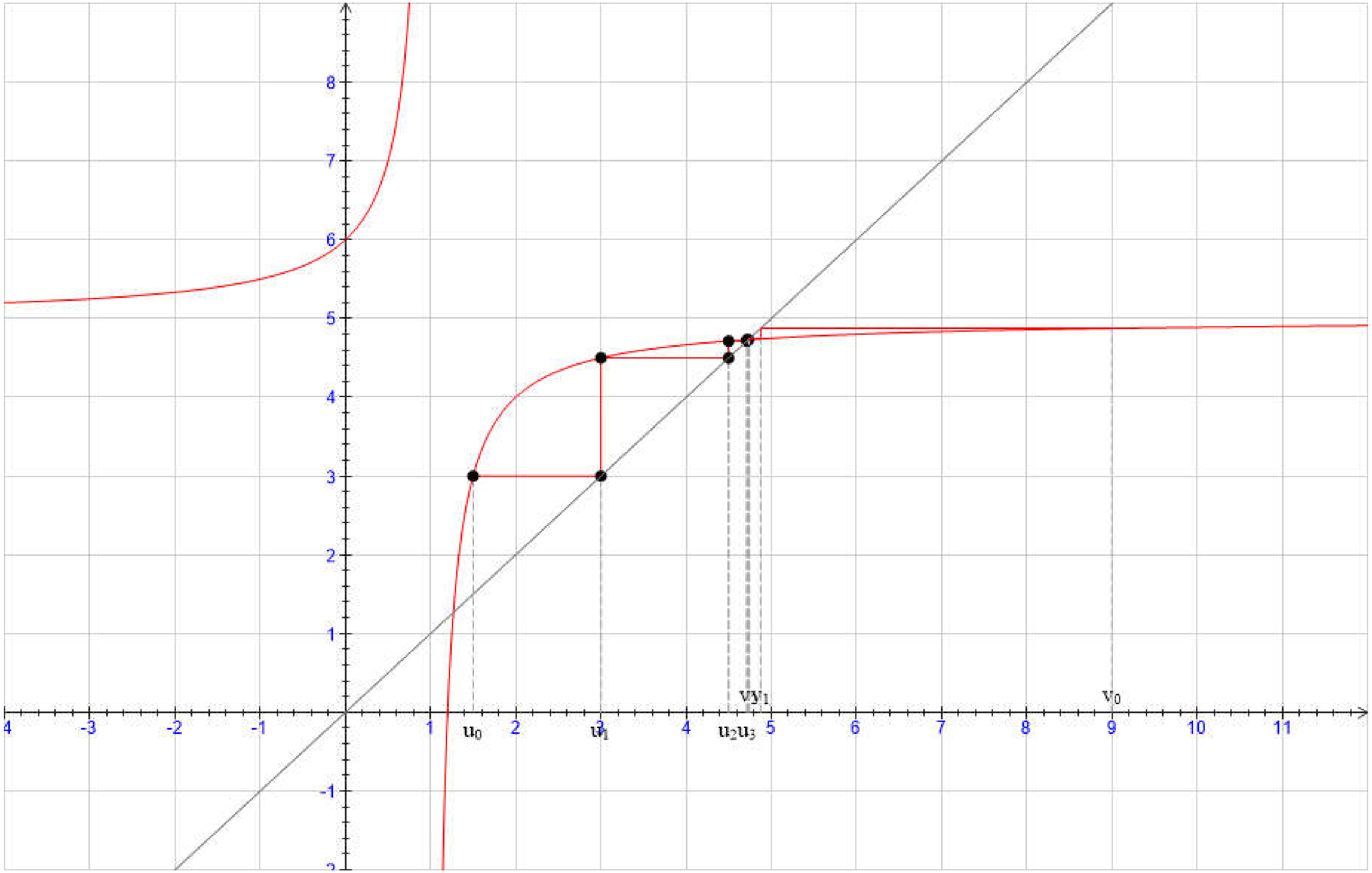
Démonstration : Nous avons $u_n = \dfrac{5n-6}{n-1}$. Comme $n \neq 1$ alors la suite est définie pour tout $n \geq 2$. $u_3 = \dfrac{5\times 3-6}{3-1} = \dfrac{9}{2}$; $u_3 = \dfrac{5\times 10-6}{10-1} = \dfrac{44}{9}$ et $u_3 = \dfrac{5\times 1000-6}{1000-1} = \dfrac{4994}{999}$.



b) Suite définie par une relation de récurrence : Avec la même fonction, $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 9 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$. Calculer u_2 et v_2 . Exprimer u_{n+4} et v_{n-3} .

Démonstration :

$u_1 = f(u_0) = \frac{5\times 1,5-6}{1,5-1} = 3$; $u_2 = f(u_1) = \frac{5\times 3-6}{3-1} = \frac{9}{2}$; $u_{n+4} = f(u_{n+3}) = \frac{5u_{n+3}-6}{u_{n+3}-1}$; $v_1 = f(v_0) = \frac{5\times 9-6}{9-1} = \frac{39}{8}$; $v_2 = f(v_1) = \frac{5\times\frac{39}{8}-6}{\frac{39}{8}-1} = \frac{147}{31}$; $v_{n-3} = f(v_{n-4}) = \frac{5v_{n-4}-6}{v_{n-4}-1}$.



3 – Variations et bornes :

1) Définitions : Soit p un entier naturel,

a) Une suite (u_n) est croissante à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_n \leq u_{n+1}$.

b) Une suite (u_n) est décroissante à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_{n+1}$.

c) Une suite (u_n) est constante à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_n = u_{n+1}$.

d) Une suite (u_n) est majorée par le réel M à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_n \leq M$.

e) Une suite est (u_n) minorée par le réel m à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_n \geq m$.

f) Une suite est (u_n) bornée par les réels M et m à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $m \leq u_n \leq M$.

g) Une suite croissante (respectivement décroissante) est toujours minorée (resp majorée) par son premier terme.

Remarque générale : Les suites sont différentes des fonctions pour toutes ces définitions. Ce qui compte, c'est le dernier comportement de la suite « à partir d'un certain rang », ce qui veut dire que la suite ne doit pas changer de comportement à partir de ce rang. Ce qui se passe pour les termes avant ce rang ne nous importe peu car il s'agit d'un nombre fini de termes. Heureusement, souvent la propriété est valable à partir du premier rang. Ensuite, on peut ajouter un caractère strict (par exemple strictement croissante) en utilisant des inégalités strictes dans les définitions. Pour information, un majorant ou un minorant ne sont pas des valeurs uniques (s'il en existe un, il y en a une infinité) et ne sont pas forcement des valeurs de termes de la suite.

Remarque : Attention, toutes les suites n'ont pas obligatoirement une monotonie, ni une borne.

Exemples : $u_n = (-2)^n$ est une suite sans monotonie, sans borne ; $v_n = (-1)^n$ est une suite sans monotonie, bornée en -1 et 1.

2) Méthodes :

a) Comment étudier une monotonie par signe d'une différence : On pose la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout n, et on étudie son signe.

Application : Soit la suite (u_n) définie pour tout n par $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$ et $u_0 = -5$. On admet que la suite (u_n) est majorée par -3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration : Soit n entier quelconque, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - u_n = \frac{2}{3}u_n - 1 - \frac{3}{3}u_n = -\frac{1}{3}u_n - 1$.

Comme (u_n) est majorée par -3 alors pour tout n, $u_n \leq -3$ donc $-\frac{1}{3}u_n \geq -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$ d'où $-\frac{1}{3}u_n - 1 \geq 1 - 1$.

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

b) Etude d'une monotonie par étude des variations : C'est une méthode spécifique pour certaines suites EXPLICITES. On étudie les variations de la fonction associée à la suite et la dernière monotonie de la fonction donne celle de la suite.

Application : Etudier la monotonie de la suite définie pour tout n, par $u_n = -n^2 + 5n - 6$.

Démonstration : La fonction associée est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 5x - 6$. Etudions ses variations : c'est une fonction trinôme avec a < 0 donc elle admet un maximum en $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$.

La fonction est décroissante sur $[2;+\infty[$ donc la suite est décroissante à partir du rang 2.

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
-x^2+5x-6			$\frac{1}{4}$		
		↗		↘	
	-6				$-\infty$

c) <u>Etude d'une monotonie par comparaison d'un quotient à 1</u> : C'est une méthode spécifique surtout pour des suites sous forme PRODUIT, PUISSANCE ou QUOTIENT et à termes de SIGNE CONSTANT. On pose le calcul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout n et on le compare à 1. Le signe constant de la suite est important pour conclure la monotonie finale.

<u>Application</u> : Etudier la monotonie de la suite définie pour tout n, par $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

<u>Démonstration</u> : Pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$. Cette suite est à termes strictement positifs donc pour tout n, $u_{n+1} < u_n$. La suite est alors décroissante.

d) <u>Etude d'une borne par signe d'une différence</u> : On pose la différence entre u_n et la borne et on étudie son signe.

<u>Application</u> : Montrer que la suite définie pour tout n > 0 par $u_n = 1 - \frac{2}{n}$ est majorée par 1.

<u>Démonstration</u> : Pour tout n > 0, $u_n - 1 = -\frac{2}{n} < 0$ alors pour tout n > 0, $u_n < 1$. La suite est donc bornée par 1.

e) <u>Etude d'une borne par étude des variations</u> : On étudie les variations de la fonction associée à la suite et on compare les extrema à la borne.

<u>Application</u> : Montrer que la suite définie au b) est majorée par 1.

<u>Démonstration</u> : Selon la question b, le maximum de f sur $[0;+\infty[$ est $\frac{1}{4}$ c'est-à-dire pour tout $x \in [0;+\infty[$ $f(x) \leq \frac{1}{4} < 1$ alors pour tout n, $u_n < 1$. La suite est majorée par 1. On aurait pu dire aussi que la suite est majorée par $\frac{1}{4}$.

4 – Le raisonnement par récurrence :

<u>Images mentales</u> : Imaginons une échelle infinie. A quelle condition peut-on la gravir jusqu'en haut ? Imaginons des dominos placés les uns derrière les autres verticalement. A quelles conditions tous les dominos vont-ils tomber ?

<u>Idées</u> : Nous devons tout d'abord être capables de monter le premier barreau. Ensuite, pour un barreau arbitrairement choisi, nous devons être capables de grimper sur le barreau suivant. Dans ce cas, nous pourrons gravir l'échelle à l'infini.
Le premier domino doit tomber et n'importe quel domino qui tombe doit être capable de faire tomber le suivant. Dans ce cas, tous les dominos vont tomber à l'infini.

<u>Principe</u> : Considérons une propriété P(n) qui dépende des entiers naturels. Nous souhaitons montrer que la propriété P(n) est vraie de manière universelle c'est-à-dire pour tout $n \geq n_0$ (n_0 donné).

<u>Méthode</u> : Comment rédiger un raisonnement par récurrence ? Procédons en trois étapes :

<u>Initialisation</u> : On montre que la propriété est vraie pour $n = n_0$. (premier rang, $P(n_0)$ vraie). C'est une vérification.
<u>Hérédité</u> : On suppose que la propriété est vraie pour un certain entier $n \geq n_0$ (n quelconque et indéfini) (<u>hypothèse de récurrence</u>) et on montre que, <u>grâce à cette hypothèse</u>, la propriété est vraie pour l'entier suivant n + 1. ($P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie)
<u>Conclusion</u> : La propriété P(n) est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.

<u>Remarque importante</u> : Lors de l'hérédité, on ne montre pas que P(n) est vraie, on ne montre pas que P(n + 1) est vraie, mais on montre que supposer P(n) vraie nous permet d'établir que P(n+ 1) est vraie.

Attention, on n'écrit pas dans l'hérédité que P(n) est vraie pour tout n. C'est une erreur grave, qui traduit que le raisonnement n'est pas compris.

Application : 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration : Posons la propriété P(n) : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation : Pour n = 1, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{2\times3}{6} = 1$ donc $\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons la propriété P(n) vraie pour un certain rang $n \geq 1$ (HR) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons alors que P(n+1) est vraie. $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\right)$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{(HR)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$. Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Alors P(n) vraie implique P(n + 1) vraie.

Conclusion : La propriété P(n) est initialisée et héréditaire donc pour tout $n \geq 1$, P(n) est vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+1}$.

a) Soit f la fonction définie sur [1 ; 2] par $f(x) = \frac{3x}{x+1}$.

i) Démontrer que f est croissante sur [1 ; 2].

ii) Démontrer que si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \in [1;2]$.

iii) Démontrer que pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$.

iv) Démontrer que pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) - x \geq 0$.

b) Dans cette question on se propose de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

i) 1ère méthode : avec une récurrence et des inégalités successives, en utilisant la question a) iii).

ii) 2ème méthode : par récurrence avec les variations de la fonction de transfert de la suite en utilisant la question a) i) et ii).

c) Dans cette question on se propose de démontrer que la suite (u_n) est croissante en utilisant la question a) iv).

Démonstration : a) i) La fonction est dérivable sur [1 ; 2] et $f'(x) = \frac{3(x+1)-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$.

$3 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ pour tout x donc $f'(x) > 0$ sur $[1;2]$ alors la fonction f est croissante sur [1 ; 2].

ii) f étant croissante sur [1 ; 2], si $1 \leq x \leq 2$ alors $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ donc $1 \leq \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 2$.

Donc si $x \in [1;2]$, $f(x) \in [1;2]$.

iii) Mettons au même dénominateur. Soit $x \in [1;2]$, $3 - \frac{3}{x+1} = \frac{3(x+1)-3}{x+1} = \frac{3x+3-3}{x+1} = \frac{3x}{x+1} = f(x)$.

iv) Soit $x \in [1;2], f(x) - x = \dfrac{3x}{x+1} - x = \dfrac{3x - x(x+1)}{x+1} = \dfrac{3x - x^2 - x}{x+1} = \dfrac{-x^2 + 2x}{x+1} = \dfrac{x(-x+2)}{x+1}$.

Si $x \geq 1$ alors $x \geq 0$ et $x+1 \geq 2 \geq 0$; si $x \leq 2$ alors $0 \leq -x+2$. En conclusion, par quotient et produit, pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) - x \geq 0$.

b) i) <u>1ère méthode</u> : Posons P(n) : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

<u>Initialisation</u> : n = 0. $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{3u_0}{u_0+1} = \dfrac{3}{2}$. On a : $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$. Donc P(0) est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons la propriété P(n) vraie pour un certain rang n (HR) $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ et montrons alors que P(n+1) est vraie. $\left(1 \overset{?}{\leq} u_{n+1} \overset{?}{\leq} u_{n+2} \leq 2\right)$.

Selon (HR) $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ alors avec la question iii), en ajoutant 1 on a : $1+1 \leq u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1 \leq 2+1$. On inverse et le sens change : $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{u_n+1} \geq \dfrac{1}{u_{n+1}+1} \geq \dfrac{1}{3}$. On multiplie par -3 et le sens change : $-\dfrac{3}{2} \leq -\dfrac{3}{u_n+1} \leq -\dfrac{3}{u_{n+1}+1} \leq -\dfrac{3}{3}$. On ajoute 3 : $3 - \dfrac{3}{2} \leq 3 - \dfrac{3}{u_n+1} \leq 3 - \dfrac{3}{u_{n+1}+1} \leq 3-1$. Alors en conclusion, $1 \leq \dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

Alors P(n) vraie implique P(n+1) vraie.

<u>Conclusion</u> : La propriété P(n) est initialisée et héréditaire donc pour tout n, P(n) est vraie, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

ii) <u>2ème méthode</u> : Posons P(n) : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

<u>Initialisation</u> : n = 0. $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{3u_0}{u_0+1} = \dfrac{3}{2}$. On a : $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$. Donc P(0) est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons la propriété P(n) vraie pour un rang n quelconque (HR) $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ et montrons alors que P(n+1) est vraie. $\left(1 \overset{?}{\leq} u_{n+1} \overset{?}{\leq} u_{n+2} \leq 2\right)$.

Selon (HR) $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ alors comme f est croissante sur [1 ; 2] , $f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$ d'où $1 \leq \dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$. Alors P(n) vraie implique P(n+1) vraie.

<u>Conclusion</u> : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n, P(n) est vraie, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

c) Selon la question iv) pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) - x \geq 0$. Or selon les méthodes précédentes, pour tout n, $1 \leq u_n \leq 2$ alors pour tout n, $f(u_n) \geq u_n$ donc pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite est donc croissante.

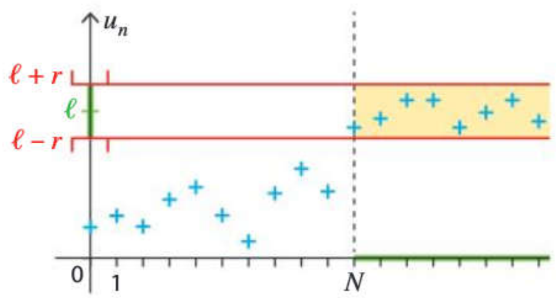
5 – LIMITES DE SUITES :

<u>Principe</u> : Dans ce paragraphe, le rang n prend des valeurs de plus en plus grandes (« n tend vers $+\infty$ ») et nous nous intéressons au comportement des termes u_n. Il y a deux situations différentes.

1) <u>Définitions</u> :

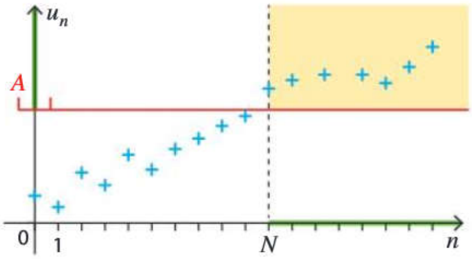
a) <u>Limite finie</u> : Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ ssi tout intervalle ouvert J contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Si ℓ existe alors il est unique et on dit que (u_n) est convergente vers ℓ. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Une suite qui ne converge pas est divergente.



(source Hachette)

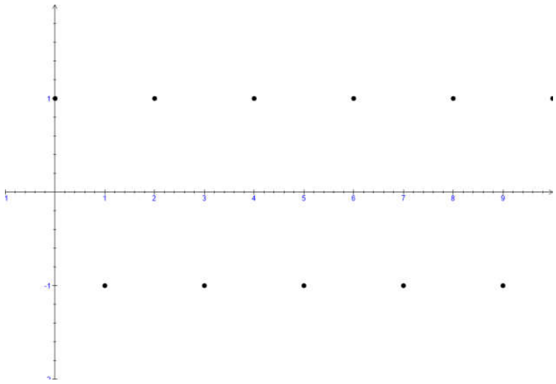
b) Limite infinie : Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$). Une telle suite est divergente.



(source Hachette)

c) Remarque : Une suite peut ne pas admettre de limite. C'est encore un cas de suite divergente.

Exemple de suite qui n'a pas de limite : $(-1)^n$



2) Opérations sur les limites :

a) Limites usuelles :

Constantes : Soit $k \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} k = k$.

Polynômes : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty \left(p \in \mathbb{N}^*\right)$.

Racine carrée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Inverses : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; Cas général : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Principe 1 : Inverser une limite infinie donne une limite nulle. "$\frac{1}{\infty} \to 0$" .

Exponentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$.

Logarithme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

b) Règles de calculs : Voici les tableaux sur les opérations et les limites pour les suites.

i) Limite d'une somme : L et L' sont deux nombres réels. Si n tend vers $+\infty$, alors :

Si u_n a pour limite	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si v_n a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 3 : Le bon sens : des limites finies s'additionnent, une limite infinie l'emporte par addition sur une limite finie et on peut ajouter des infinis de même signe.

ii) Limite d'un produit : L et L' sont deux nombres réels. Si n tend vers $+\infty$ alors :

Si u_n a pour limite	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si v_n a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $u_n \times v_n$ a pour limite	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 3 : Le bon sens : des limites finies se multiplient, les limites infinies se multiplient et une limite infinie l'emporte par multiplication sur une limite finie non nulle.

Principe 4 : La règle des signes est essentielle et fonctionne avec les limites de produits.
iii) Limite d'un quotient :

Cas où le dénominateur admet une limite non nulle : L et L' sont deux nombres réels. Si n tend vers $+\infty$ alors :

Si u_n a pour limite	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si v_n a pour limite	L' $\neq$ 0	$\pm\infty$	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$\pm\infty$
Alors $\frac{u_n}{v_n}$ a pour limite	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 1 : Inverser une limite infinie donne une limite nulle. $"\frac{1}{\infty} \to 0"$

Principe 3 : Le bon sens : des limites finies se divisent à condition que la limite du dénominateur soit non nulle et une limite infinie au numérateur l'emporte sur une limite de dénominateur finie non nulle.

Principe 4 : La règle des signes est essentielle et fonctionne avec les limites de quotients.

Cas où le dénominateur admet une limite égale à 0 : L est un nombre réel non nul. Si n tend vers $+\infty$ alors :

Si u_n a pour limite	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	0
Si v_n a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\frac{u_n}{v_n}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Principe 2: Inverser une limite nulle donne une limite infinie, dont le signe est à déterminer par une étude de signe. $"\frac{1}{0} \to \infty"$.

Principe 4 : La règle des signes est essentielle et fonctionne avec les limites de quotients.

PRINCIPE 5 : Il y a quatre situations à bien connaitre où on ne peut pas conclure la limite d'une opération tout de suite. Il faut débloquer la situation. Ce sont les quatre formes indéterminées que nous étudierons au paragraphe 3.

Méthode : Comment inverser une limite infinie ?

La suite est sous forme de fraction. Il faut montrer que le numérateur a une limite finie et que le dénominateur a une limite infinie. Le résultat final est donc une limite nulle.

Application : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2+2n}$.

Démonstration : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2 \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty \end{cases} \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2+2n = +\infty$ alors par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{n^2+2n} = 0$.

Méthode : Comment déterminer le signe final d'une inversion de limite nulle ?

On calcule la limite du numérateur pour obtenir un nombre réel non nul dont on analyse le signe. Ensuite, on montre que la limite du dénominateur est nulle. Puis on étudie le signe du dénominateur au voisinage de $+\infty$. On conclut une limite infinie dont le signe est donné par la règle des signes.

Applications : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$.

Démonstration :

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3 = -3 < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ alors par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 0$. Il y a une inversion de 0 donc étudions le signe de $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}$ au voisinage de $+\infty$. Si $n \to +\infty$, $n > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > 0$ et $\dfrac{1}{n^2} > 0$ alors $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2} > 0$.

Avec la règle des signes et par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = -\infty$.

3) Les formes indéterminées :

a) Définition : Une forme indéterminée correspond à un cas où on ne peut pas conclure tout de suite sur la limite d'une suite car il y a plusieurs possibilités. Il faut donc faire des calculs supplémentaires pour la débloquer et conclure. Il ne faut pas confondre une forme indéterminée avec la possibilité qu'une suite n'ait pas de limite.

Il y a quatre formes $"+\infty+(-\infty)"$, $"0\times\infty"$ $"\dfrac{0}{0}"$ $"\dfrac{\infty}{\infty}"$. Les méthodes suivantes s'appliquent majoritairement sur des suites explicites et il existe d'autres méthodes que nous verrons dans la leçon sur les fonctions.

b) Méthode : Comment débloquer $"+\infty+-\infty"$?

Méthode 1 : Il faut factoriser tout le terme général de la suite par un « terme prépondérant » (qui n'est pas forcement un facteur commun donc ne pas oublier de diviser et penser à simplifier) puis calculer la limite de chaque facteur, puis du produit obtenu.

Application : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2-7n+3$.

Démonstration : $5n^2-7n+3 = n^2\left(5-\dfrac{7}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5-\dfrac{7}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right) = 5 > 0$ alors par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2-7n+3 = +\infty$.

c) Méthode : Comment débloquer $"\dfrac{\infty}{\infty}"$?

Il faut factoriser les « termes prépondérants » du numérateur et du dénominateur (qui ne sont pas forcement des facteurs communs, ni les mêmes) puis il faut simplifier. Ensuite on calcule la limite de chaque facteur, puis du quotient obtenu.

Application : Déterminer a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-5n-3}{n^2-4}$ et b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^5-3n}{4n^2-2n-1}$.

Démonstration :

a) $\dfrac{-5n-3}{n^2-4}=\dfrac{n\left(-5-\dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)}\overset{\text{Simplification}}{=}\dfrac{1}{n}\times\dfrac{\left(-5-\dfrac{3}{n}\right)}{\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5-\dfrac{3}{n}\right)=-5$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ alors par produit puis quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-5n-3}{n^2-4}=0$.

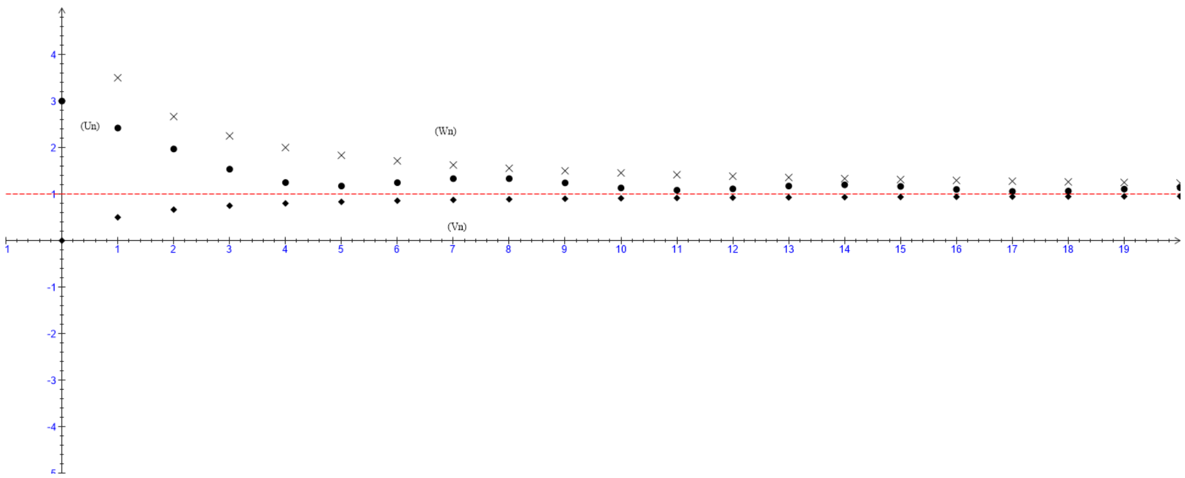
b) $\dfrac{5n^5-3n}{4n^2-2n-1}=\dfrac{n^5\left(5-\dfrac{3}{x^4}\right)}{n^2\left(4-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}\overset{\text{Simplification}}{=}n^3\times\dfrac{\left(5-\dfrac{3}{x^4}\right)}{\left(4-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-\dfrac{3}{x^4}\right)=5>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=4>0$ alors par produit et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^5-3n}{4n^2-2n-1}=+\infty$.

4) Comparaisons entre suites et limites :

Principe : Certaines limites ne sont pas calculables directement. Alors on va comparer la suite étudiée à d'autres suites qui ont des limites connues.

a) Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) : (admis)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites qui vérifient à partir d'un certain rang, $u_n \le v_n \le w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=L$ où L est un réel alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=L$.



Remarque : Ce théorème établit deux résultats sur la suite : elle est convergente et sa limite est connue.

b) Corollaire : L est un réel. Si à partir d'un certain rang, $|u_n-L|\le v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$.

Méthode : Comment utiliser le théorème des gendarmes ?

On montre que la suite (u_n) est encadrée entre deux autres suites à partir d'un certain rang. On calcule la limite de la suite qui est inférieure : elle doit convergente vers un nombre réel L. Ensuite, on calcule la limite de la suite qui est supérieure : elle doit être convergente vers le même réel L. Dans ce cas, le théorème nous dit que (u_n) est convergente et admet pour limite L.

Application : Etudier la limite de la suite définie pour tout n par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Démonstration : Pour tout $n>0$, $-1\le(-1)^n\le 1$ alors $-\dfrac{1}{n}\le\dfrac{(-1)^n}{n}\le\dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ alors selon le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

c) Théorèmes de comparaison :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang :

i) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$; de même, si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

ii) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L' \in \mathbb{R}$ alors $L \leq L'$.

iii) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ et si (u_n) est croissante alors pour tout n, $u_n \leq L$. De même, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ et si (u_n) est décroissante alors pour tout n, $L \leq u_n$.

Application : Etudier la limite de la suite définie pour tout n par $v_n = 3n + 1 + (-1)^n$.

Démonstration : Pour tout n, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $3n + 1 - 1 \leq 3n + 1 + (-1)^n \leq 3n + 1 + 1$ c'est-à-dire $3n \leq 3n + 1 + (-1)^n \leq 3n + 2$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$ et pour tout n, $3n \leq 3n + 1 + (-1)^n$ alors par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + 1 + (-1)^n = +\infty$.

Remarque générale : Ces théorèmes ne sont pas très compliqués à utiliser. La différence entre les deux tient dans le fait que le théorème des gendarmes concerne des limites finies alors que le deuxième théorème concerne des limites infinies. Nous nous rendrons compte que la principale difficulté de ces résultats sera surtout d'établir les inégalités entre les suites, car cela demandera de connaitre les nombreuses règles de comparaisons des expressions algébriques.

5) Convergences de suites monotones :

a) Théorème (admis) :

Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite mais seulement son existence. Il est d'une importance capitale et apparait à coup sûr dans les sujets.

b) Théorème :

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.