Études de fonctions et quelques propriétés globales

1 – Rappels de seconde – Généralités :

1) Définition : On définit une fonction f quand on a précisé :

Un ensemble de définition de f, noté parfois D_f : c'est l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction existe.
Un procédé de calcul qui, à chaque réel x de D_f , associe un réel unique noté f (x).

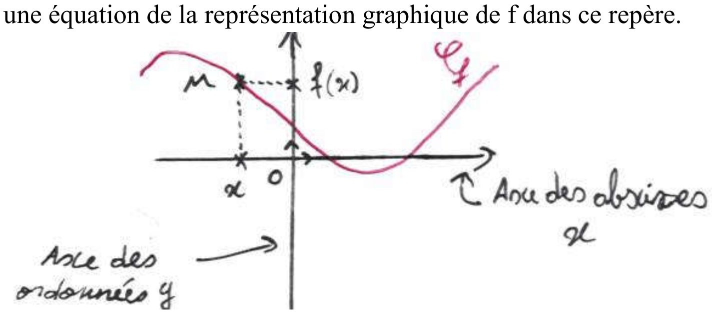
On écrit : f : $\begin{array}{l} D_f \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$.

Si f(x) = y, on dit que y est l'image de x par f. On dit aussi que x est un antécédent de y par f.

Remarque : Un ensemble de définition est généralement obtenu selon la possibilité ou non de faire les calculs d'images f(x). Par exemple, la plupart des fonctions existent sur $\mathbb{R}$. Par contre, les quotients ne doivent pas avoir un dénominateur nul ce qui donne des valeurs interdites, les racines carrées n'existent que pour des expressions positives et la fonction logarithme n'existe que pour des expressions strictement positives, nous amenant à des intervalles ou des réunions d'intervalles. On obtient ainsi les ensembles de définition maximaux. Mais, quelque fois, l'ensemble de définition peut être une partie donnée, incluse dans un ensemble maximal ou bien être construit selon des contraintes du problème posé, comme dans des problèmes de géométrie par exemple.

2) Représentation graphique :

Un repère étant choisi, on appelle représentation graphique (ou encore courbe représentative ou courbe) d'une fonction f, l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) lorsque x prend toutes les valeurs de D_f et que y = f(x).
On dit aussi que y = f(x) est une équation de la représentation graphique de f dans ce repère.

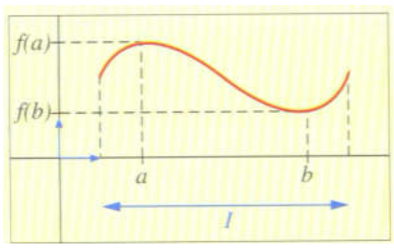


3) Maximum, minimum :
a) Définition : Soient M et m deux réels :

La fonction f admet un maximum M sur l'intervalle I, lorsque pour tout x de I, f(x) $\leq$ M et il existe un réel a dans l'intervalle I tel que M = f (a). C'est la plus grande valeur atteinte par la fonction sur l'intervalle I.

La fonction f admet un minimum m sur l'intervalle I, lorsque pour tout x de I, f(x) $\geq$ m et il existe un réel b dans l'intervalle I tel que m = f (b). C'est la plus petite valeur atteinte par la fonction sur l'intervalle I

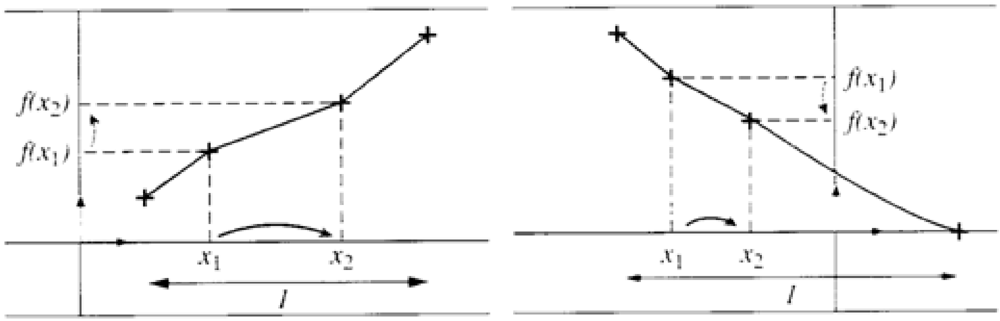
b) Interprétation graphique :



c) Remarque : Un minimum ou un maximum est aussi appelé un extremum.
C'est une notion locale : elle dépend de l'intervalle dans lequel on se place.
Une fonction peut ne pas avoir d'extremum sur l'intervalle où elle est définie.

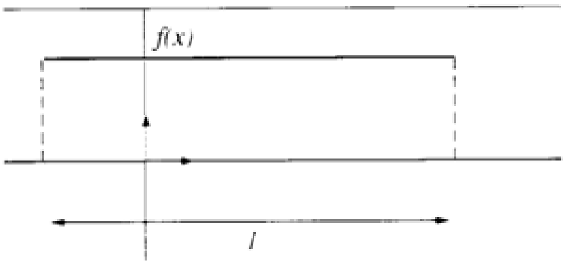
4) Sens de variation d'une fonction :

Définition : Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.
La fonction f est croissante sur I quand les nombres de I et leurs images par f sont dans le même ordre :
Pour tout réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
La fonction f est décroissante sur I quand les nombres de I et leurs images par f sont dans l'ordre inverse :
Pour tout réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.



une fonction croissante   une fonction décroissante

La fonction f est constante sur I quand tous les nombres de I ont la même image par f : elle est à la fois croissante et décroissante.



Une fonction est monotone sur I si c'est une fonction qui n'est que croissante ou bien que décroissante sur I.

Remarque :
Une fonction croissante sur I conserve l'ordre des images dans le même sens de comparaison que les nombres de départ.
Une fonction décroissante sur I change l'ordre des images dans le sens de comparaison contraire à celui des nombres de départ.
Une fonction constante ne prend qu'une valeur pour tout x de I. Il suffit donc de connaitre une image pour avoir sa valeur sur tout l'intervalle.
Lorsque la monotonie est stricte, les inégalités concernant les images sont strictes.
Attention, une variation de fonction n'est jamais définie sur une réunion d'intervalles. C'est une grosse erreur.

Les variations d'une fonction se présentent dans un tableau de variations. En première ligne, se situent l'ensemble de définition et les valeurs de changement de variations classées dans l'ordre croissant de gauche à droite. En deuxième ligne, on représente les variations par des flèches montantes ou descendantes, de gauche à droite. Aux extrémités de ces flèches se trouverons les images ou les limites des valeurs de la première ligne.

5) Comparaison de fonctions : Soient f et g deux fonctions définies sur I, de courbes respectives C_f et C_g .

Résoudre f = g sur I revient à résoudre l'équation f (x) = g (x) sur I.
Graphiquement, cela équivaut à chercher les abscisses des points d'intersection entre C_f et C_g .

Résoudre f $>$ g sur I revient à résoudre l'inéquation f (x) > g (x) sur I.
Graphiquement, cela équivaut à chercher les intervalles contenant les abscisses des points de C_f qui sont au dessus de ceux de C_g , en éliminant les abscisses communes.

Résoudre f $\leq$ g sur I revient à résoudre l'inéquation f (x) $\leq$ g (x) sur I. Graphiquement, cela équivaut à chercher les intervalles contenant les abscisses des points de C_f qui sont au dessous de C_g , en conservant les abscisses communes.

2 – Une opération essentielle sur les fonctions :

1) Définition : Soit f une fonction définie sur I et soit g une fonction définie sur J.
On appelle h fonction composé de f suivie de g, la fonction définie pour les valeurs x de I telles que f (x) appartienne à J, notée h = $g \circ f$ et définie par h (x) = $(g \circ f)(x)$ = g[f (x)].

$$\begin{cases} I \xrightarrow{f} f(I) \subset J \xrightarrow{g} K \\ x \mapsto f(x) \mapsto g[f(x)] \\ I \xrightarrow{h=g\circ f} K \\ x \mapsto h(x) = g[f(x)] \end{cases}$$

Remarque : $\circ$ se prononce « rond ».

Remarque - Attention : h n'est pas la même fonction que h' = $f \circ g$. h'(x) = f [g(x)].

2) Méthode 1 : Comment composer deux fonctions entre elles ?

On remplace la variable de la deuxième fonction par l'expression complète de la première fonction. Ensuite, on simplifie les calculs.

Application : Soit f et g définies sur leurs ensembles de définition par $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que leurs ensembles de définition.

Démonstration : $f \circ g(x) = f(g(x)) = \dfrac{g(x)-4}{g(x)+1} = \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$. Cette fonction existe ssi $x \geq 0$ et $\sqrt{x}+1 \neq 0$. Comme $\sqrt{x} \geq 0$ alors $\sqrt{x}+1 \geq 1$ donc $\sqrt{x}+1 \neq 0$ alors $D_{f\circ g} = [0;+\infty[$.
$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}$. Cette fonction existe ssi $\dfrac{x-4}{x+1} \geq 0$. Avec un tableau de signes, on obtient :
$D_{g\circ f} =]-\infty;-1[\cup[4;+\infty[$.

Méthode 2 : Comment décomposer une fonction en fonctions usuelles ?

Il peut y avoir plusieurs décompositions possibles mais elles doivent respecter les priorités des calculs. On part de la variable x, puis on essaye de trouver la première fonction usuelle. Ensuite, on essaye de déterminer la fonction suivante appliquée à la première fonction et ainsi de suite.

Remarque importante : Cette compétence de décomposition est essentielle dans les sujets pour établir des continuités, dérivabilités ou ce genre de choses globales. Ce qu'il est important de bien comprendre lorsqu'on considère deux fonctions de décompositions enchainées, c'est que l'ensemble d'arrivée de la première fonction doit être inclus dans l'ensemble de définition de la deuxième fonction. Et vous devez montrer que vous avez compris ce principe dans les copies lors de la rédaction.

Application : a) Décomposer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x-2)^2 - 5$ à l'aide de fonctions usuelles.
b) Décomposer la fonction g définie sur $]5;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x-5)$.

Démonstration :
a) $x \overset{g:x\mapsto x-2}{\mapsto} x-2 \overset{h:y\mapsto 3y^2}{\mapsto} 3(x-2)^2 \overset{i:z\mapsto z-5}{\mapsto} 3(x-2)^2 - 5$. Alors $f = i \circ h \circ g$. Toutes ces fonctions existent et aboutissent dans $\mathbb{R}$ donc il n'y a pas de problème d'existence. Autre décomposition : $x \overset{g:x\mapsto x-2}{\mapsto} x-2 \overset{h:y\mapsto y^2}{\mapsto} (x-2)^2 \overset{i:z\mapsto 3z-5}{\mapsto} 3(x-2)^2 - 5$.
b) $x \overset{h:x\mapsto x-5}{\mapsto} x-5 \overset{i:t\mapsto \ln(t)}{\mapsto} \ln(x-5)$. Alors $g = i \circ h$. Remarquons que si $x \in]5;+\infty[$ alors $h(x) \in]0;+\infty[$. Or la fonction i est définie sur $]0;+\infty[$. Donc la composition des deux fonctions est valable.

3 – Rappels de première et terminale : Dérivabilité sur un intervalle :

La dérivabilité en un point et la justification de la dérivabilité globale d'une fonction seront vues dans un autre fichier.

1) Fonction dérivée :

a) Définition : Soit I un intervalle de l'ensemble de définition de f.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable pour tout x de I.
La fonction qui à x associe le nombre dérivé f '(x) s'appelle fonction dérivée de f. Elle est notée f '.

b) Dérivées de fonctions usuelles – Opérations avec les dérivées :

Nous pouvons démontrer, à l'aide de la définition de la dérivabilité en un point, que toute fonction dérivable sur un intervalle I et ayant un certain type, admet une fonction dérivée définie par une formule précise. On arrive à la même conclusion en se posant la question de la dérivation d'opérations entre plusieurs fonctions.
Donc le calcul des fonctions dérivées se fera en appliquant des formules, situées ci-dessous, que l'on apprendra et que l'on adaptera aux opérations formant les fonctions à dériver.
Certaines nouvelles formules seront démontrées dans la suite de la leçon ou au cours de l'année.

Dérivées de fonctions usuelles

Intervalle de définition de la fonction	Si l'expression de f(x) est égale à	Alors sa dérivée a pour expression $f'(x) =$	Intervalle de définition de la dérivée.
$\mathbb{R}$	k (un nombre)	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	mx + p	m	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^2	2x	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n \in \mathbb{Z}^*_-$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ ou $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	e^{-x}	$-e^{-x}$	$\mathbb{R}$
$]0;+\infty[$	ln x	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

Opération avec les dérivées

u et v sont des fonctions dérivables sur I ; elles dépendent de x mais pour simplifier, on ne l'écrit pas dans les formules.

Dérivée d'une somme de fonctions : (u + v)' = u' + v'.

Dérivée de la multiplication d'une fonction par un nombre : $(k\times u)' = k\times u'$ où k est un nombre réel.

Dérivée d'un produit de fonctions : $(u\times v)' = u'\times v + v'\times u$.

Dérivée de l'inverse d'une fonction : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$ où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I

Dérivée du quotient de deux fonctions : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\times v - v'\times u}{v^2}$ où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I.

Dérivée d'une fonction composée : $(f\circ u)' = u'\times f'\circ u$. Toutes les formules suivantes en découlent.

Dérivée du carré d'une fonction : $(u^2)' = 2\times u'\times u$.

<u>Dérivée de la puissance d'une fonction</u> : (n entier relatif) $(u^n)' = n\times u' \times u^{n-1}$ (avec u (x) $\neq 0$ sur I si n ≤ -1)

<u>Dérivée de la racine d'une fonction :</u> $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec u strictement positive sur I.

<u>Dérivée d'une fonction de fonction affine</u> : $\left[f(ax+b)\right]' = a\times f'(ax+b)$ avec $a \neq 0$ et $ax+b \in I$.

<u>Dérivée de l'exponentielle d'une fonction</u> : $\left(e^u\right)' = u'\times e^u$.

<u>Dérivée du logarithme d'une fonction strictement positive</u> : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec u fonction strictement positive sur I.

c) <u>Dérivées successives</u> : Si une fonction f admet sur I une fonction dérivée f' elle-même dérivable alors on peut définir sa dérivée seconde f'' qui est $(f')'$ notée aussi $f^{(2)}$. On peut réitérer le processus si la fonction obtenue est dérivable sur I. Si n est un entier naturel, on calcule alors les dérivées successives de f selon le principe : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. L'entier n est l'ordre de dérivation de f.

<u>Méthode</u> : Comment calculer des dérivées successives ?

La fonction de départ f étant dérivable sur l'intervalle où l'on travaille, on la dérive avec les formules pour obtenir f'. Cette dérivée devient la fonction de départ pour calculer une nouvelle dérivée (si bien-sûr elle est dérivable), qui s'appellera f''. On réitère le procédé jusqu'à atteindre l'ordre de dérivation souhaité.

<u>Application</u> : Calculer la dérivée troisième de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 6$

<u>Démonstration</u> : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.
Pour tout x, $f'(x) = 3\times 3x^2 - 2\times 5x + 4 = 9x^2 - 10x + 4$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.
Pour tout x, $f''(x) = 2\times 9x - 10 = 18x - 10$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.
Pour tout x, $f^{(3)}(x) = 18$.

<u>Méthode</u> : Comment dériver avec une formule de composition ?

On applique tout simplement une des formules déjà établies précédemment, dans la majeure partie des cas. Il faut repérer quelle est la fonction u des formules, la dériver indépendamment et l'insérer dans la formule.

<u>Applications</u> : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions proposées sur leurs intervalles de dérivabilité donnés.

1) $f:\begin{cases}]3;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{3x-9} \end{cases}$ 2) $g:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(3x^2-4x+2\right)^4 \end{cases}$ 3) $h:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x^2-5x+7} \end{cases}$.

<u>Démonstration</u> :

1) f est dérivable sur $]3;+\infty[$ comme racine carrée non nulle d'une fonction affine. Utilisons alors la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ en posant $u(x) = 3x - 9$ sur $]3;+\infty[$. Alors $u(x) = 3$ et pour tout $x \in]3;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-9}}$.

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme puissance d'une fonction trinôme. Utilisons alors la formule $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$ avec n = 4 en posant $u(x) = 3x^2 - 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$. Alors $u'(x) = 6x - 4$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$g'(x) = 4(6x-4)\left(3x^2-4x+2\right)^{4-1} = 4(6x-4)\left(3x^2-4x+2\right)^3$.

3) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme exponentielle d'une fonction trinôme. Utilisons alors la formule $\left(e^u\right)' = u'e^u$ en posant $u(x) = x^2 - 5x + 7$ sur $\mathbb{R}$. Alors $u'(x) = 2x - 5$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (2x-5)e^{x^2-5x+7}$.

2) Applications de la dérivation :

a) Méthode : Comment déterminer par le calcul, l'équation d'une tangente à une courbe en un point ?

Nous devons appliquer la formule $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Repérons d'abord la valeur de a qui est l'abscisse du point de la courbe où se trouve la tangente, ensuite nous devons calculer f(a), qui est l'ordonnée du point où se trouve la tangente. Ensuite, on calcule la fonction dérivée $f'(x)$ pour tout x où f est dérivable. Il reste à calculer $f'(a)$. Pour finir, on remplace toutes ces valeurs dans la formule de l'équation de la tangente et on développe un peu pour arriver à une équation réduite.

Application : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 3.

Démonstration : Ici a = 3. Donc une équation de la tangente en a est donnée par $y = f'(3)(x-3)+f(3)$.
$f(3) = 3^2 + 2\times3+3 = 9+6+3 = 18$. La fonction f est une fonction trinôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f'(x) = 2x+2$ d'où $f'(3) = 2\times3+2 = 8$. Remplaçons dans l'équation précédente : $T_A : y = 8(x-3)+18 = 8x-24+18 = 8x-6$.
Alors $T_A : y = 8x-6$.

b) Dérivée et sens de variation : Soit f une fonction dérivable sur I.

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée f '. Soit I un intervalle.

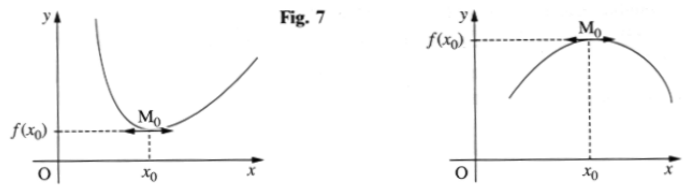
$f' \geq 0$ sur I équivaut à f est croissante sur I.
$f' \leq 0$ sur I équivaut à f est décroissante sur I.
$f' = 0$ sur I équivaut à f est constante sur I.

c) Recherche d'extremum :

i) Définition : On dit que f (a) est un maximum ou un minimum (extremum) local si on peut trouver un intervalle ouvert I contenant a sur lequel f (a) est le maximum ou le minimum sur I.

ii) Théorème :
Si f admet un maximum ou un minimum local f (a) en x = a (a n'est pas une borne de l'intervalle) alors $f'(a) = 0$. La tangente à la courbe de f au point A (a ; f(a)) est alors horizontale.
Réciproquement, si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a (f change de variation) alors f(a) est un extremum local en a.

Fig. 7



La tangente à la courbe en M_0 est parallèle à l'axe des abscisses.

iii) Méthode : Comment étudier les variations d'une fonction ?

Une fois l'ensemble de définition déterminé, on peut commencer par étudier les limites de la fonction f aux bornes de cet ensemble. Ensuite, une fois la dérivation établie brièvement, nous pouvons calculer la fonction dérivée de f. Il faut étudier alors l'équation $f'(x)=0$ afin de déterminer des extrema locaux potentiels. Pour les confirmer, nous continuons par une étude de signe de la dérivée sur l'ensemble de définition. Si le signe n'est pas évident, on peut construire un tableau de signes pour f' .
Exploitons les résultats : si la dérivée change de signe pour les valeurs solutions de $f'(x)=0$ alors il y a des extrema locaux en ces valeurs. Sinon, il n'y en a pas.
Pour finir, on présente le tout dans un tableau de variation de f, en n'oubliant pas de calculer les images éventuelles des valeurs remarquables de l'ensemble de définition et en disposant les limites de f.
Si l'énoncé nous demande de séparer l'étude du signe de f' et l'étude des variations de f alors on sépare les tableaux. Sinon, sans précision, on peut regrouper les deux tableaux.

Application : Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g telles que $f(x)=2x^3-3x^2-36x+6$ et $g(x)=x^3$.

Démonstration : Étude de f sur $\mathbb{R}$: Les limites sont vues dans un autre fichier.

Limites aux bornes : Il doit y avoir des formes indéterminées à l'infini. Soit $x\neq 0$, $f(x)=x^3\left(2-\frac{3}{x}-\frac{36}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{36}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)=2>0$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{36}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)=2>0$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. Pour tout x, $f'(x)=6x^2-6x-36$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x-36=0 \underset{\div 6}{\Leftrightarrow} x^2-x-6=0$; $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=1+24=25>0$. Il y a deux solutions $x_1=\frac{1+\sqrt{25}}{2}=\frac{1+5}{2}=3$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{25}}{2}=\frac{1-5}{2}=-2$. f' étant du second degré, elle change de signe en fonction de ces deux valeurs. On peut construire tableau de signes de f' et tableau de variations de f en une seule fois.

Calculons $f(-2)=2\times(-2)^3-3\times(-2)^2-36\times(-2)+6=50$; $f(-2)=2\times3^3-3\times3^2-36\times3+6=-75$.

x	-∞		-2		3		+∞
f'(x)		+	0	−	0	+	
2*x^3-3*x^2-36*x+6	-∞	$\nearrow$	50	$\searrow$	-75	$\nearrow$	+∞

Étude de g sur $\mathbb{R}$:
Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. Pour tout x, $g'(x)=3x^2$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$; Pour tout x, $g'(x)=3x^2\geq 0$ donc g ne change pas de signe en 0 : il n'y a pas d'extremum local en 0. On peut construire tableau de signes de g' et tableau de variations de g en une seule fois.

x	-∞		+∞
f'(x)		+	
x^3	-∞	$\nearrow$	+∞

4 – Fonctions convexes :

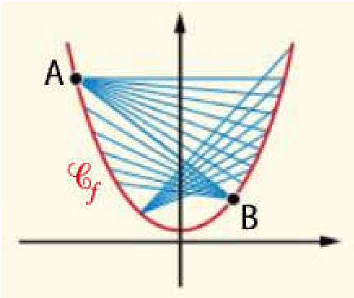
1) <u>Définitions</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.

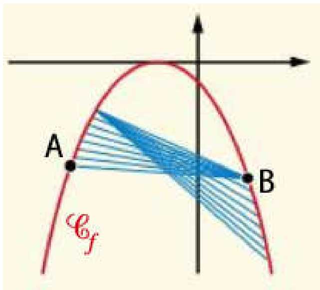
La fonction f est convexe sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de C_f, d'abscisses dans I, le segment [AB] est au-dessus de la courbe C_f entre A et B.

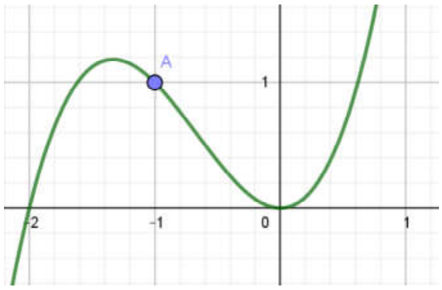
La fonction f est concave sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de C_f, d'abscisses dans I, le segment [AB] est en dessous de la courbe C_f entre A et B.

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer les intervalles où f est convexe ou concave

Soit A un point de C_f. On dit que A est un point d'inflexion de C_f si et seulement si la fonction f change de convexité pour l'abscisse de A.







2) <u>Exemples avec les fonctions usuelles</u> :
La fonction carrée et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est concave sur $[0;+\infty[$.
La fonction cube est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$. Le point O est un point d'inflexion.
La fonction inverse est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.

3) <u>Propriétés</u> : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

a) f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ f'' est positive sur I $\Leftrightarrow$ f' est croissante sur I $\Leftrightarrow$ C_f est située au-dessus de ses tangentes sur I.
b) f est concave sur I $\Leftrightarrow$ f'' est négative sur I $\Leftrightarrow$ f' est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ C_f est située en dessous de ses tangentes sur I.
c) $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de C_f $\Leftrightarrow$ f'' s'annule et change de signe en a $\Leftrightarrow$ f' change de variation en a $\Leftrightarrow$ La tangente en A traverse la courbe C_f en A

4) <u>Méthode</u> : Comment étudier la convexité d'une fonction par le calcul ?
Si la fonction f est deux fois dérivable sur son ensemble de définition, on calcule la fonction dérivée seconde puis on étudie son signe. L'exploitation de ce signe nous donne la convexité de f.

<u>Application</u> : Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-x)e^{2x}$.

<u>Démonstration</u> : La fonction f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x, $f'(x) = -1\times e^{2x} + 2(2-x)e^{2x} = e^{2x}(-1+4-2x) = e^{2x}(3-2x)$.
Pour tout x, $f''(x) = -2e^{2x} + 2(3-2x)e^{2x} = e^{2x}(-2+6-4x) = e^{2x}(4-4x)$.
Pour tout x, $e^{2x} > 0$ donc $f''(x)$ a le signe de $(4-4x)$ sur $\mathbb{R}$. Voici le tableau de signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''(x)		+	0	−	

La fonction f'' s'annule et change de signe en 1 donc la courbe de f admet un point d'inflexion en 1.
La fonction f'' est positive sur $]-\infty;1]$ donc f est convexe sur $]-\infty;1]$ et f'' est négative sur $[1;+\infty[$ donc f est concave sur $[1;+\infty[$.

7) Méthode : Comment montrer une inégalité à l'aide de la convexité d'une fonction ?

Dans la plupart des exercices, on établit la convexité de la fonction sur l'intervalle où l'on travaille. Ensuite, on calcule une équation d'une tangente en un point quelconque ou donné. La convexité de la fonction nous permet de conclure sur le sens de comparaison entre l'expression de la fonction et la fonction associée à la tangente.
La méthode peut différer dans certains cas, en exploitant les multiples propriétés de la convexité d'une fonction.

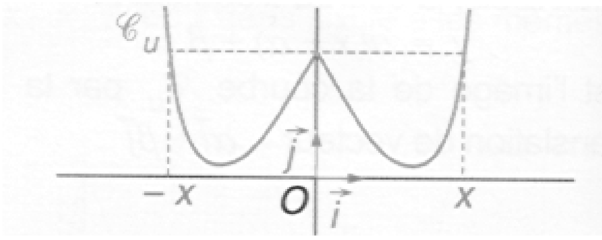
Application : Montrer que pour tout réel, $e^x \geq x+1$.

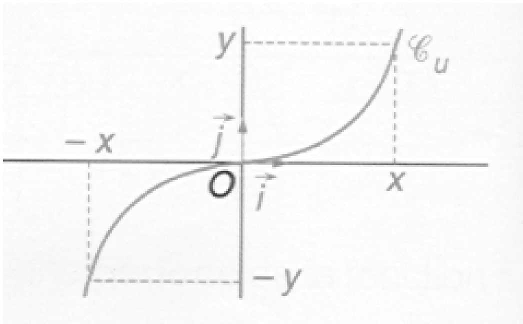
Démonstration : La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$.
Déterminons l'équation de la tangente en 0 : Une équation est de la forme $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.
$f(x)=e^x$ donc $f'(x)=e^x$. Alors $f(0)=e^0=1$ et $f'(0)=e^0=1$. Alors $T_0 : y=(x-0)+1=x+1$. La courbe de f est toujours au-dessus de cette tangente ce qui se traduit par : pour tout x, $e^x \geq x+1$.

5 - Parité d'une fonction : On se place dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan :

1) Définition : Une fonction f est paire ssi pour tout x de D_f on a $-x \in D_f$ (l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0) et pour tout x, $f(-x)=f(x)$. La courbe C_f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Une fonction f est impaire ssi pour tout x de D_f on a $-x \in D_f$ (l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0) et pour tout x, $f(-x)=-f(x)$. La courbe C_f admet le point O comme centre de symétrie.





Remarque : Attention, une fonction peut n'être ni paire, ni impaire. C'est une propriété particulière de certaines fonctions.
L'intérêt de la parité réside dans la possibilité de réduire l'ensemble d'étude de la fonction à un ensemble de borne 0. On complète ensuite l'étude par symétrie pour les variations, les limites ou des calculs d'intégrales. Par exemple, une fonction paire ou impaire sur $\mathbb{R}$ sera étudiée sur $[0;+\infty[$ et nous complèterons l'étude sur $]-\infty:0]$, par symétrie.

b) Exemples : Etudier la parité des fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ par $f(x)=x^4-4x^2-1$ et $g(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

Démonstration :
L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)^4-4(-x)^2-1=x^4-4x^2-1=f(x)$ donc f est une fonction paire et sa courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$ donc il est symétrique par rapport à 0. Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$,
$g(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x}{x^2-4}=-g(x)$ donc g est une fonction impaire et sa courbe admet le centre O comme centre de symétrie.