SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

PRÉ-REQUIS DE PREMIÈRE ANNÉE :
Résolutions des équations différentielles linéaires scalaires, notamment les équations $y' = ay$ et $ay'' + by' + cy = 0$.

PRÉ-REQUIS DE DEUXIÈME ANNÉE :
Chapitres 6 : Réduction des matrices carrées.

1 – DÉFINITION ET RÉSOLUTION :

1) Définition : Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
On appelle système différentiel linéaire homogène à coefficients constants un système de la forme :

$$(S)\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad t \in I$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont n fonctions, de variable t, dérivables sur I et $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ sont n^2 réels. Le but de la résolution de ce système est de trouver les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ définies sur I.

Remarque : dans la grande majorité des cas, nous aurons $I = \mathbb{R}$.

2) Notation matricielle :

On pose pour tout $t \in I$: $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors le système (S) peut s'écrire sous la forme : (S) : $X'(t) = AX(t)$ avec $t \in I$.

Résoudre le système, c'est trouver le vecteur-fonction X(t) défini sur I.

3) Théorème (admis) : En considérant le système (S) : $X'(t) = AX(t)$ et la condition initiale $X(t_0) = X_0$, où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$ sont donnés, alors ce problème s'appelle un problème de Cauchy. Ce problème admet une solution unique.

Remarque :
Si n = 1, on retrouve une équation différentielle linéaire connues : $x'(t) = ax(t)$.
Si la condition initiale $X(t_0) = X_0$ n'est pas donnée, l'ensemble des solutions (s'il existe) du système (S) est un espace vectoriel.
Si le système n'est pas homogène, par exemple de la forme $(S_B) : X'(t) = AX(t) + B(t)$ où B(t) est un vecteur colonne de taille n, on procède comme pour la théorie classique des équations différentielles. Tout d'abord, on résout le système homogène(S) : $X'(t) = AX(t)$ avec la méthode décrite dans ce paragraphe. Ensuite, on détermine des solutions particulières du système (S_B). Pour cela, des indications seront données dans les questions. Pour finir, on conclut en ajoutant la solution du système homogène (S) avec les solutions particulières définies par B(t).

4) <u>Résolution dans le cas où la matrice est diagonalisable</u> :

<u>Principe</u> :
a) On considère un système différentiel (S) sous sa forme matricielle $X'(t)=AX(t)$ avec $t\in I$ et pour lequel A est une matrice diagonalisable.

b) A étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible (matrice de changement de base vers une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres) et une matrice diagonale D (associée à P et dont la diagonale est formée par les valeurs propres de A) telles que $D=P^{-1}AP$.

c) Pour rechercher les composantes de $X(t)$ dans la nouvelle base $\mathscr{B}$, on pose le vecteur $Y(t)$ tel que $X(t)=PY(t)$ $\Leftrightarrow P^{-1}X(t)=Y(t)$. On note $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t)\end{pmatrix}$.

d) Par dérivation, $X'(t)=PY'(t)$ donc $X'(t)=AX(t)\Leftrightarrow PY'(t)=APY(t)\Leftrightarrow Y'(t)=P^{-1}APY(t)\Leftrightarrow Y'(t)=DY(t)$.

e) Comme $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$ alors le système précédent donne : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ y_i'(t)=\lambda_i y_i(t)$. Cela correspond à des équations différentielles de référence que l'on sait résoudre. Les solutions de chacune de ces équations sont des fonctions définies sur I telles que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ y_i(t)=C_i e^{\lambda_i t}$ où $C_i\in\mathbb{R}$. On a donc $Y(t)=\begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$ où $(C_1,\dots,C_n)\in\mathbb{R}^n$.

f) On revient au système initial en faisant le calcul matriciel : $X(t)=PY(t)=C_1e^{\lambda_1 t}u_1+\dots+C_ne^{\lambda_n t}u_n$ où $(u_1,\dots,u_n)$ sont les vecteurs propres colonnes de P.

g) Si une condition initiale $X(t_0)=X_0$ est donnée, cela nous permet de déterminer la valeur de $(C_1,\dots,C_n)$ de manière unique.

<u>Remarques</u> : Dans le programme, à priori, la matrice A sera toujours diagonalisable. Mais nous verrons que nous pourrons aboutir à des solutions dans des cas simples où A n'est pas diagonalisable. Par exemple, lorsque A est semblable à une matrice triangulaire. On peut penser que dans ces exercices, les questions vous guideront. (Voir exercices)
On peut noter que la matrice P^{-1} n'est pas utilisée dans les calculs.
Dans le programme, la matrice A sera de taille 2 ou 3.

<u>Exemple-Méthode</u> : Comment résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants dans le cadre du programme ?

Nous appliquons la démarche précédente pas à pas.

(1) On souhaite résoudre le système non homogène suivant $(S_B):\begin{cases} x'(t)=y(t)+z(t)+t \\ y'(t)=-x(t)+2y(t)+z(t)+t \\ z'(t)=x(t)+z(t)+t\end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que le vecteur-fonction défini pour tout t par $f(t)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t-\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}t-\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ est une solution particulière de (S_B).

2) Posons le système homogène défini sur $\mathbb{R}$ par (S) : $\begin{cases} x'(t)=y(t)+z(t) \\ y'(t)=-x(t)+2y(t)+z(t) \\ z'(t)=x(t)+z(t)\end{cases}$. Le résoudre avec la méthode vue dans ce paragraphe. Pour cela, on montrera que les vecteurs $u_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1\end{pmatrix}$, $u_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix}$ et $u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice du système, associés à des valeurs propres que l'on déterminera.

3) En déduire une solution générale de (S_B) puis la solution unique de (S_B) qui vérifie $x(0)=z(0)=1$ et $y(0)=2$.

Démonstration :

2 – Lien avec les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n \geq 2$:

1) Rappel : Soit l'équation différentielle du second ordre, définie sur $\mathbb{R}$ par (E) : $ax'' + bx' + cx = 0$ où $a \neq 0$ réel et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ sont donnés. Notons $ar^2 + br + c = 0$ une équation caractéristique de l'équation (E).

a) Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors les solutions de (E) sont les fonctions définies pour tout t de $\mathbb{R}$ par $x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Si l'équation caractéristique admet une solution réelle double r alors les solutions de (E) sont les fonctions définies pour tout t de $\mathbb{R}$ par $x(t) = (C_1t + C_2)e^{rt}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Si l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle, nous ne pouvons pas conclure dans le cadre du programme.

2) Théorème : Posons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ et le vecteur fonction $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ défini sur $\mathbb{R}$.

La fonction x est solution de l'équation (E) : $ax'' + bx' + cx = 0$ si et seulement si la fonction x est la première composante du vecteur solution du système (S) : $X' = AX$.

Démonstration :

3) Exemple-Méthode : Comme résoudre un système linéaire en passant par un une équation différentielle d'ordre 2 ?

La matrice du système A doit avoir la bonne forme, c'est-à-dire une première ligne avec 0 puis 1. Dans ce cas, on ne se préoccupe pas de la diagonalisation de A. Il suffit de faire apparaitre l'équation différentielle d'ordre 2 (on se rend compte que $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$) puis de la résoudre. Ne reste plus qu'à dériver la solution pour constituer le vecteur-fonction solution du système.

(1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

<u>Démonstration</u> :

2) <u>Si n > 2</u> : Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
A travers un exemple, nous allons détailler la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n > 2, c'est-à-dire de la forme (E) : $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 = 0$ où y est une fonction n fois dérivable sur I et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

a) <u>Première étape</u> : C'est l'étape primordiale. Pour une équation d'ordre n, on pose le vecteur de taille n de la forme $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ et on essaye de montrer que l'équation (E) se ramène à un système linaire (S) : $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice de taille n.
b) <u>Deuxième étape</u> : On résout le système (S) à l'aide des éléments sur la diagonalisation de A (Méthode du paragraphe 1).
c) <u>Troisième étape</u> : On conclut en donnant comme solution de l'équation (E), la première coordonnée du vecteur solution $X(t)$ définie sur I.

<u>Application</u> : (1) Considérons l'équation différentielle (E) : $y''' - 3y'' - 6y' + 8y = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Appliquer la première étape pour déterminer la matrice A et le système (S).
2) On admet que A est diagonalisable, semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ grâce à la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 16 \end{pmatrix}$ telle que $D = P^{-1}AP$. Résoudre le système (S).
3) En déduire les solutions de l'équation (E) définies sur $\mathbb{R}$.

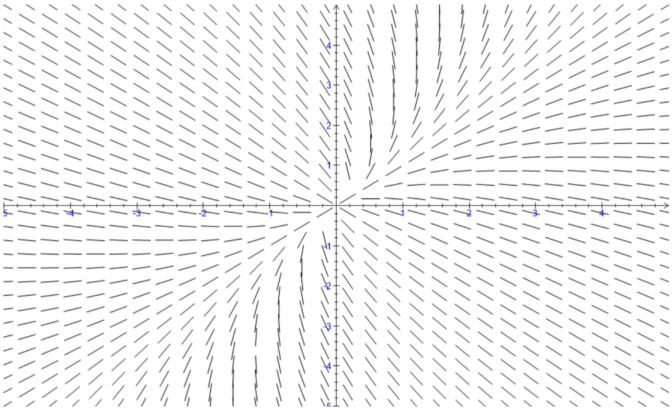
<u>Démonstration</u> :

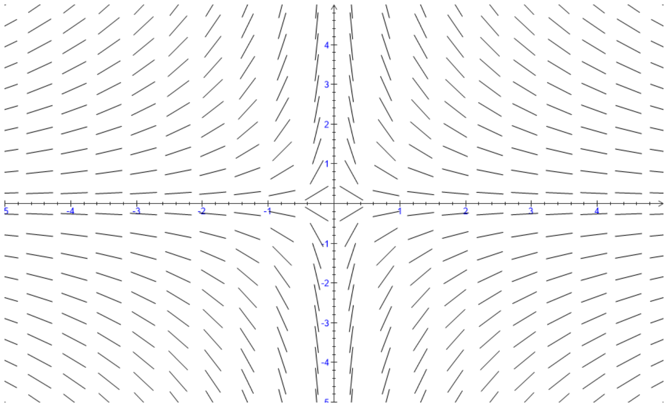
3 – Réflexions sur les solutions :

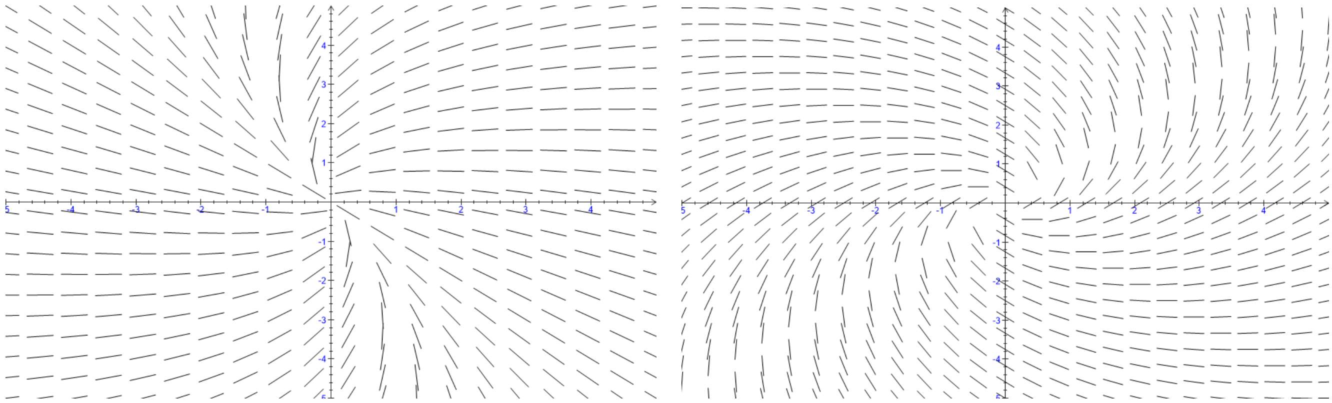
1) <u>Définition</u> : Étant donnée la solution unique X du problème de Cauchy (S) : $X'(t) = AX(t)$ avec $X(t_0) = X_0$, $t \in I$, on appelle <u>trajectoire</u> l'image de cette solution. Précisons : pour un système de deux équations différentielles, en posant la solution unique $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la trajectoire est $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $t \in I$ et se représente dans le plan repéré par la courbe paramétrée définie par les points $\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\}$; pour un système de trois équations différentielles, en posant la solution unique $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la trajectoire est $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$ et se représente dans l'espace repéré par la courbe paramétrée définie par les points $\{(x(t), y(t), z(t)), t \in \mathbb{R}\}$.

<u>Remarque</u> : Pour un même système d'équations, en modifiant la condition initiale, on obtient une trajectoire différente car les constantes ont changé. Le graphe qui représente les différentes trajectoires en fonction des modifications des conditions initiales (donc des modifications des constantes) s'appelle le <u>portrait de phase</u> du système.

<u>Exemples de portraits de phase dans le plan (systèmes à deux équations)</u> :







2) État d'équilibre : Toute solution X du système (S) telle que AX(t) = 0 s'appelle un point critique ou point d'équilibre.

Remarque : Un point d'équilibre est obligatoirement un vecteur-fonction constant.
Le système étant homogène, le vecteur-fonction nul est toujours un point d'équilibre.
Si A est inversible, le vecteur-fonction nul est l'unique point d'équilibre.

3) Définition - Propriété : Soit $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que X(t) converge en $+\infty$ vers X* ssi $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = x_i^*$

Dans ce cas, $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ un point d'équilibre du système (S).

4) Propriété : Si A est diagonalisable, l'ensemble des points d'équilibres du système (S) est Ker(A).

5) Stabilité : Soit X^* un point d'équilibre du système (S).
a) On dit que X^* est un équilibre stable lorsque, pour tout point initial X_0 « proche » de X^*, la trajectoire X(t) qui en provient reste « proche » de X^* pour tout t > 0.
Si l'équilibre n'est pas stable, on dit qu'il est instable.

b) On dit que X^* est un équilibre asymptotiquement stable lorsque X^* est stable et pour tout point initial X_0 « proche » de X^*, la trajectoire X(t) qui en provient vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = X^*$.

6) Comportement asymptotique des trajectoires pour une matrice diagonalisable :

On considère un système différentiel (S) dans lequel la matrice A est diagonalisable. On note $\lambda_1,...,\lambda_n$ les valeurs propres de A.
a) Si $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i \leq 0$, chaque trajectoire X(t) converge vers un point d'équilibre asymptotiquement stable $X^* \in \mathrm{Ker}(A)$ lorsque $t \to +\infty$.
b) Si $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i < 0$, chaque trajectoire X(t) converge vers le point d'équilibre asymptotiquement stable $0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to +\infty$.
c) Si on note $\lambda_{i_1},...,\lambda_{i_k}$ toutes les valeurs propres de A strictement positives alors il peut exister des trajectoires qui convergent vers un point d'équilibre instable lorsque $t \to +\infty$. Ces trajectoires proviennent des solutions du système (S) qui vérifient $C_{i_1} = ... = C_{i_k} = 0$ où $C_1,...,C_n$ sont les constantes trouvées lors de la résolution.
d) En particulier, si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, le point d'équilibre $0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est instable et aucune trajectoire non nulle ne converge vers un point d'équilibre.

Exemple-méthode : Comment déterminer un point d'équilibre ? Comment identifier les trajectoires qui convergent vers ces points d'équilibre ?

Application :

(1) En reprenant le système homogène de l'exemple du paragraphe 1, (S) : $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ déterminer l'ensemble des points d'équilibre du système (S). Quelles sont les trajectoires qui y mènent ?

(2) En reprenant le système homogène de l'exemple du paragraphe 2, (S) : $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ déterminer l'ensemble des points d'équilibre du système (S). Quelles sont les trajectoires qui y mènent ?

Démonstration :