VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

PRÉ-REQUIS DE PREMIÈRE ANNÉE :
Fonctions : Continuité, dérivabilité, classes, limites, variations.
Intégration.
Théorie des probabilités, variables aléatoires.
PRÉ-REQUIS DE DEUXIÈME ANNÉE :
Intégrales impropres.

1 – RAPPELS SUR LA FONCTION DE RÉPARTITION :

1) Définition : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P). On appelle fonction de répartition de la variable X, la fonction, notée F_X, définie sur $\mathbb{R}$, qui a tout réel x associe $F_X(x) = P(X \leq x)$.

2) Propriétés :
a) Une fonction de répartition est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \in [0;1]$.
b) Pour tout x, F_X possède une limite à droite et une limite en gauche en x.
c) Pour tout x, F_X est continue à droite en x.
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
e) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ et $P(X > x) = 1 - F_X(x)$.
f) Si X est une variable discrète alors F_X est une fonction en escalier et si de plus X est à valeur dans $\mathbb{N}$, $P(X = 0) = F_X(0)$ et pour tout $\forall k \in [\![1;n]\!]$ ou $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

3) Théorème :
a) La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est caractérisée par sa fonction de répartition.
b) Deux variables aléatoires réelles ont même fonction de répartition ssi elles ont la même loi.

2 – DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS :

1) Densité - Définitions : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et F_X sa fonction de répartition.
a) On dit que X est une variable à densité lorsque F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
b) Toute fonction f_X définie et positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f_X(x) = F'_X(x)$ pour tout réel où F_X est de classe C^1, est appelée une densité de X.

2) Propriétés des variables aléatoires réelles à densité : Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F_X et de densité f_X.
a) Propriétés :
i) $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$.
ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X > x) = P(X \geq x) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,dt$.
iii) Pour tout couple de réels (a, b) tels que a < b :
$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt$.
iv) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X = x) = 0$.
v) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$.
vi) Si f_X est continue à droite (respectivement à gauche) en x alors F_X est dérivable à droite (respectivement à gauche).
Si f_X est continue en x alors F_X est de classe C^1 en x.
vii) Le support de X est l'ensemble des valeurs pour lesquelles la densité est non nulle.
viii) Le support de X est l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction de répartition est non nulle et différente de 1..

b) Théorème :

i) Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité ssi :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf peut-être en un nombre fini de points} \\ f \text{ est une fonction à valeurs positives} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge et vaut } 1 \end{cases}.$$

ii) Une fonction F est une fonction de répartition d'une variable à densité ssi

$$\begin{cases} F \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R} \\ F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf peut-être pour un nombre fini de points.} \\ F \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ ; } \lim_{x\to-\infty} F(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} F(x)=1 \end{cases}$$

c) Exercice-Méthode : Comment obtenir la densité avec la fonction de répartition et vice-versa ?

i) Si nous avons une densité f sur $\mathbb{R}$, on détermine la fonction de répartition F associée, en calculant des intégrales de f par découpage selon les intervalles définissant f ou les points de discontinuité de f.
ii) Si nous avons une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$, on détermine la densité f associée, en dérivant F sur les intervalles définissant F où elle est de classe C^1 puis on affecte à f des valeurs arbitraires aux valeurs où F n'est pas de classe C^1.

(1) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<1 \\ 1-\frac{1}{x} \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$.

Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable à densité X dont on déterminera la densité.

(2) Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} |x| \text{ si } x\in[-1;1] \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable X et déterminer la fonction de répartition.

Démonstration :

3) Fonction d'une variable aléatoire réelle à densité. Quatre exemples classiques :

a) Propriété : Soit X une variable aléatoire à densité et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Si la fonction de répartition F_Y de la variable Y = g(X) est continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, alors Y est un variable à densité.

b) Exemple avec une fonction affine : Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X et de densité f_X et considérons la variable aléatoire Y = aX + b $(a \neq 0,\ b \in \mathbb{R})$. C'est une variable à densité.

La fonction de répartition de Y est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ si $a > 0$ et $F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ si $a < 0$

Pour toutes valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $x \mapsto F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ est de classe C^1, $f_Y(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ si $a > 0$ et

$f_Y(x) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ si $a < 0$.

Démonstration-Méthode :

Remarque : Attention, même si X et Y sont à densité, il n'est pas certain que X + Y soit à densité.

Contre-exemple : Soit X à densité et Y = 1 – X qui est donc à densité (relation affine). Alors X + Y = 1 n'est pas à densité car discrète.

c) <u>Exemple avec la fonction carré</u> : Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X et de densité f_X et considérons la variable aléatoire $Y = X^2$. C'est une variable à densité.

La fonction de répartition de Y est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

Pour toutes valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $F_X(\sqrt{x})$ et $F_X(-\sqrt{x})$ sont de classe C^1,

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

<u>Démonstration-Méthode</u> :

d) <u>Exemple avec la fonction exponentielle</u> : Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X et de densité f_X et considérons la variable aléatoire $Y = e^X$. C'est une variable à densité.

La fonction de répartition de Y est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ F_X(\ln(x)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

Pour toutes valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $x \mapsto F_X(\ln x)$ est de classe C^1, $f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} f_X(\ln x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

<u>Démonstration-Méthode</u> :

e) Exemple avec la fonction logarithme : Soit X une variable aléatoire à densité, strictement positive, de fonction de répartition F_X et de densité f_X et considérons la variable aléatoire $Y = \ln(X)$. C'est une variable à densité.

La fonction de répartition de Y est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_X(e^x)$.

Pour toutes valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $x \mapsto F_X(e^x)$ est de classe C^1, $f_Y(x) = e^x f_X(e^x)$.

Démonstration-Méthode :

4) Espérance mathématique :

a) Définition : Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t \times f_X(t)\,dt$ converge absolument . On a dans ce cas, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f_X(t)\,dt$.

Remarque : convergence absolue veut dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t \times f_X(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t)\,dt$ converge.
On dit aussi que E(X) est le moment d'ordre 1 de X.
Se préoccuper de l'existence de l'espérance sous-entend qu'il existe des variables à densité qui n'admettent pas d'espérance.

b) Théorème de transfert : Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et g une fonction définie sur $X(\Omega)$, continue sur $X(\Omega)$, sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors la variable Y = g(X) admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \times f_X(t)\,dt$ converge absolument. Dans ce cas, $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \times f_X(t)\,dt$.

c) Exercice-Méthode : Comment utiliser le théorème de transfert ?

Sous les conditions du théorème de transfert, pour calculer l'espérance de la variable aléatoire Y = g(X), nous devons faire deux choses :
i) montrer la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \times f_X(t)\,dt$ c'est-à-dire la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \times f_X(t)\,dt$;
ii) calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \times f_X(t)\,dt$.

(1) Soit la variable aléatoire X de densité $f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que la variable aléatoire $Y = e^X$ admet une espérance et la calculer.

Démonstration :

d) Propriété : Les propriétés déjà connues sur l'espérance sont respectées pour les variables aléatoires à densité :
Soit X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance alors Z = aX + bY $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et Z' = aX + b sont des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Pour finir, E(Z) = aE(X) + bE(Y) et E(Z') = aE(Z) + b.
De plus, si $P(X\leq Y)=1$ alors $E(X)\leq E(Y)$ et si $P(X\geq 0)=1$ alors $E(X)\geq 0$.

e) Propriété : Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance alors Y = X – E(X) est aussi une variable aléatoire à densité admettant une espérance et on a E(Y) = 0. On dit que Y est la variable centrée associée à X.

Remarque : une variable admettant une espérance nulle est une variable centrée dans tous les cas.

5) Moment d'ordre 2, variance et écart-type :

a) Définition : Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\times f_X(t)\,dt$ converge alors la variable X^2 admet une espérance, appelée moment d'ordre 2. Dans ce cas, $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\times f_X(t)\,dt$.
Remarque : La convergence doit être aussi absolue mais le carré neutralise la valeur absolue.

b) Définition : Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X. Si $\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2\times f_X(t)\,dt$ converge alors X admet une variance V(X) et $V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2\times f_X(t)\,dt$. De plus X admet aussi un écart type $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Remarque : Se préoccuper de l'existence de la variance sous-entend qu'il existe des variables à densité qui n'admettent pas de variance.
Si une variable admet une variance alors elle admet une espérance.

c) Formule de Koening-Huygens : Soit X une variable aléatoire à densité. Si E(X) et $E(X^2)$ existent alors X admet une variance V(X) et $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

Remarque : Une variable X admet une variance si et seulement si $E(X^2)$ existe. Sauf que, généralement, pour appliquer cette formule, on démontre l'existence puis on calcule l'espérance E(X). Ensuite on s'occupe de l'existence et de la valeur de $E(X^2)$ pour enfin calculer V(X).

d) Propriétés : Les propriétés sur la variance et l'écart type sont respectées pour les variables à densité.
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Considérons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$ alors :
Y = aX + b admet une variance telle que $V(aX+b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

e) Propriété : Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance (donc une espérance et un écart type) alors $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est aussi une variable aléatoire à densité admettant une variance (donc une espérance et un écart type) et on a E(Y) = 0 et $\sigma(Y) = 1$. On dit que Y est la variable centrée réduite associée à X.

Remarque : une variable que l'on divise par l'écart type est réduite dans tous les cas.

6) Moment d'ordre r : Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X . Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \times f_X(t)\,dt$ converge absolument alors la variable X admet un moment d'ordre r noté, $E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r \times f_X(t)\,dt$.

Remarque : Si un moment d'ordre r existe alors les moments d'ordre inférieurs existent.

3 – Lois usuelles :

1) Loi uniforme : Soit X une variable aléatoire à densité suivant le loi uniforme sur [a ; b] (a < b). On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$.
On a $X(\Omega) = [a,b]$.

a) La fonction de répartition est donnée par : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$.

b) La densité de X est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

c) Pour tout $a \le c \le d \le b$, $P(c \le X \le d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

d) $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et la variance est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. Donc l'écart type est $\sigma(X) = \dfrac{(b-a)}{\sqrt{12}}$.

e) Elle caractérise la probabilité que des nombres se trouvent dans des intervalles de réels, tous ces nombres étant uniformément répartis.

Exemple : temps d'attente au téléphone dans une fourchette horaire.

f) Propriétés :
Si X suit la loi uniforme sur [0 ; 1] et si a < b alors Y = a + (b – a) X suit la loi uniforme sur [a ; b].
Si X suit la loi uniforme sur [a ; b] (a < b) alors $Y = \dfrac{1}{b-a}(X-a)$ suit la loi uniforme sur [0 ; 1].

g) Python : La commande numpy.random.uniform (a,b,t) renvoie un tableau de taille t contenant des valeurs prises par une variable suivant une loi uniforme continue sur l'intervalle réel $[a,b]$.

2) Loi exponentielle : Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

a) La fonction de répartition est donnée par : $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ donc on a $X(\Omega) = [0;+\infty[$.

b) La densité de X est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

c) Pour tout $0 \leq c \leq d$, $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$, $P(X \leq c) = 1 - e^{-\lambda c}$ et $P(X \geq c) = e^{-\lambda c}$.

d) $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et la variance est $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Donc l'écart type est $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

e) Loi de durée de vie sans vieillissement : Pour tous réels positifs c et d, $P_{(X>c)}(X > c+d) = P(X > d)$.
Cette propriété caractérise la loi exponentielle.

f) Elle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire ou sans vieillissement.

Exemple : durée de vie d'ampoules LED, durée de vie des atomes radioactifs, arrivée des clients dans une file d'attente.

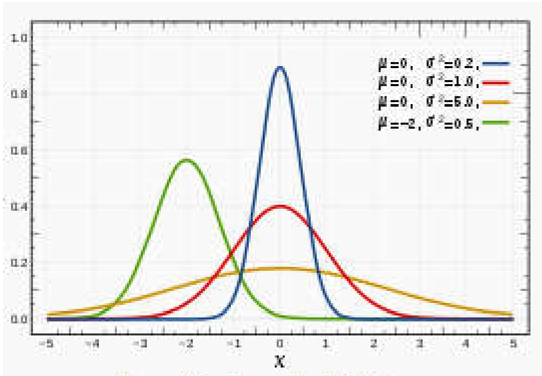
g) Propriétés : Si X suit la loi uniforme sur [0 ; 1[et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

h) Python : La commande numpy.random.exponential (α ,t) renvoie un tableau de taille t contenant des valeurs prises par une variable suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.

3) Loi normale : Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale $\mathcal{N}$ de paramètres $(m,\sigma^2) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma > 0$.
On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

a) La fonction de répartition est donnée par : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$. (Pas de formule explicite)

b) La densité de X est donnée par : $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$. La représentation de cette densité est une courbe de Gauss ou courbe en cloche.



Densité de probabilité

c) Les probabilités se calculent avec des tables de valeurs ou une calculatrice ou des aires sous la courbe en cloche. Cette courbe a un axe de symétrie d'équation x = m. Avec cette propriété de symétrie :
Pour tout réel a, $P(X \leq m-a) = P(X \geq m+a)$; $P(X \leq m-a) = 1 - P(X \leq m+a)$ et
$P(m-a \leq X \leq m+a) = 2P(X \leq m+a) - 1$.

d) $E(X) = m$ et la variance est $V(X) = \sigma^2$. Donc l'écart type est $\sigma(X) = \sigma$.

e) Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma > 0$ alors la variable $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0,1)$, de densité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ sur $\mathbb{R}$, d'espérance nulle et de variance égale à 1. On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

La fonction de répartition de Y vérifie $\Phi_Y(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_Y(-x) = 1 - \Phi_Y(x)$.
Pour tout réel a, $P(X \le -a) = P(X \ge a)$; $P(X \le -a) = 1 - P(X \le a)$ et $P(-a \le X \le a) = 2P(X \le a) - 1$.

f) Elle modélise des phénomènes issues de plusieurs évènements aléatoires. Elle permet d'approcher d'autres lois.

Exemple : suite d'expériences aléatoires similaires et indépendantes répétées en très grand nombre. Tests de fiabilité d'une production.

g) Propriétés : X suit la loi normale $(m, \sigma^2) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma > 0 \Leftrightarrow$ avec $a \ne 0$, Y = aX + b suit la loi normale $(am + b, a^2\sigma^2)$.

h) Python : La commande numpy.random.normal (m, σ ,t) renvoie un tableau de taille t contenant des valeurs prises par une variable suivant une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ .

4 – Vecteurs aléatoires. Suites de variables aléatoires :

1) Indépendance d'une famille de variables continues :

a) Définition : Les variables aléatoires réelles à densité X et Y sont indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a : $P([X \le x] \cap [Y \le y]) = P(X \le x) P(Y \le y)$.

b) Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables aléatoires réelles à densité $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si, pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$, on a : $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \le x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i)$.

c) Définition : On dit qu'une suite de variables aléatoires à densités $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si, pour toute partie finie $I \subset \mathbb{N}^*$, les variables X_k avec $k \in I$, sont mutuellement indépendantes.

d) Lemme des coalitions :
Si $X_1, X_2, ..., X_k, X_{k+1}, ..., X_n$ sont des variables aléatoires réelles à densités, mutuellement indépendantes, alors tout variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, ..., X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{k+1}, ..., X_n$.

2) Espérance et variance d'une somme de *n* variables aléatoires discrètes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Espérance : Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires réelles à densités qui possèdent toutes une espérance alors la variable $X_1 + X_2 + ... + X_n$ possède une espérance et $E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$.

b) Variance : Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires réelles à densités, mutuellement indépendantes, qui possèdent toutes une variance alors la variable $X_1 + X_2 + ... + X_n$ possède une variance et $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$.

c) Propriétés sur les lois normales : Une somme de variable aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale. L'espérance de la loi somme est la somme des espérances et la variance de la loi somme est la somme des variances.

3) Espérance d'un produit de *n* variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires réelles à densités, mutuellement indépendantes, qui possèdent toutes une espérance alors la variable $X_1 X_2 ... X_n$ possède une espérance et $E(X_1 X_2 ... X_n) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$.

4) <u>Loi du min, loi du max</u> <u>d'une suite de n variables aléatoires à densité</u> :

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables aléatoires réelles à densité, <u>mutuellement indépendantes</u>, qui suivent la même loi qu'une variable aléatoire à densité X, de fonction de répartition F.

a) <u>Loi du max</u> : Si on pose la variable aléatoire $W_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et F_n sa fonction, alors W_n est une variable à densité et :

i) $\forall x \in \mathbb{R}, (W_n \leq x) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq x)$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = (F(x))^n$.

b) <u>Loi du min</u> : Si on pose la variable aléatoire $w_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$ et G_n sa fonction, alors w_n est une variable à densité et :

i) $\forall x \in \mathbb{R}, (w_n \geq x) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geq x)$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \leq x)) = 1 - (1 - F(x))^n$.

<u>Remarque</u> : dans les sujets, on peut trouver $\sup(X_1, X_2, ..., X_n)$ à la place de $\max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $\inf(X_1, X_2, ..., X_n)$ à la place de $\min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

<u>Démonstration</u> :