INTÉGRATION GÉNÉRALISÉE À UN INTERVALLE QUELCONQUE

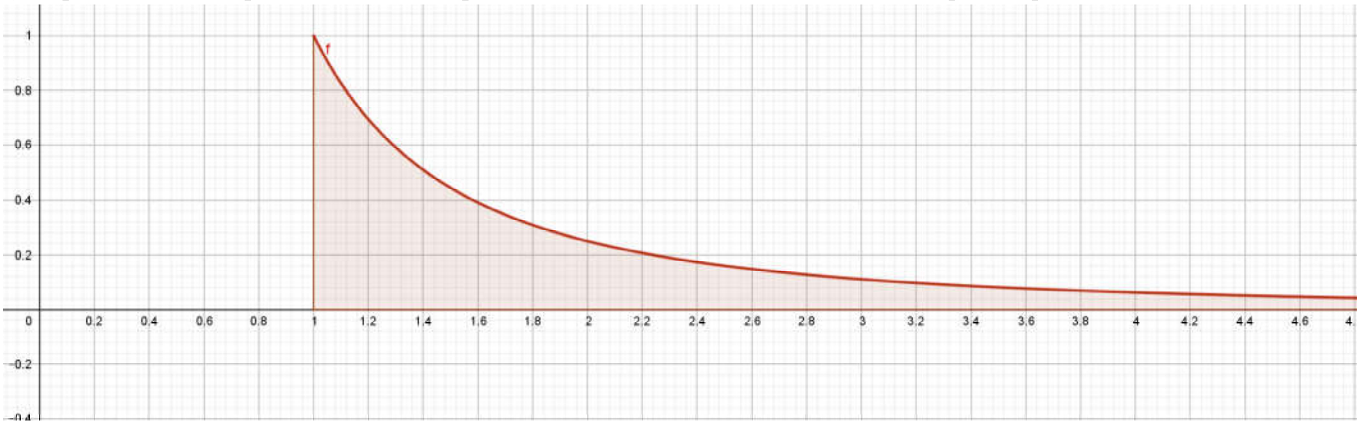
PRÉ-REQUIS DE PREMIÈRE ANNÉE :

Fonctions : limites, continuité, dérivabilité, classes, primitives, valeur absolue.

Intégration : Intégrale d'une fonction sur un segment, propriétés de l'intégrale, intégration par parties, changement de variable, fonction définie par une intégrale.

1 — INTÉGRALES IMPROPRES :

1) Le paradoxe « de la peinture » : Peut-on peindre un mur infini avec un nombre fini de pots de peintures ?



Démonstration :

2) Définitions :

a) Soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$ avec a un réel de l'ensemble de définition de f. On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est impropre ou généralisée en $+\infty$.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ existe et est finie. On obtient $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$.

Sinon on dit qu'elle diverge.

b) Soit f une fonction continue sur $]-\infty;a]$ avec a un réel de l'ensemble de définition de f. On dit que $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ est impropre ou généralisée en $-\infty$.

On dit que $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ converge si et seulement si $\lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$ existe et est finie. On obtient $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$.

Sinon on dit qu'elle diverge.

c) Soit f définie sur $\mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ convergent quel que soit $a \in \mathbb{R}$ arbitrairement choisi.

Remarque : On ne traite pas dans la même intégrale plusieurs bornes où l'intégrale est impropre. Ce travail de découpage est essentiel. (Voir relation de Chasles)

e) Etudier la nature d'une intégrale impropre consiste à étudier sa convergence ou sa divergence.

Exemple-Méthode : Comment établir la convergence d'une intégrale en une borne où elle est impropre et la calculer ?

On commence par établir rapidement la continuité de la fonction à intégrer et on fait remarquer la borne pour laquelle l'intégrale est impropre. Si on nous demande de calculer l'intégrale, après convergence, cela veut dire que, dans la majorité des cas, le calcul d'une primitive sera possible d'une manière ou d'une autre. On se servira de cette primitive pour établir la convergence et le calcul. Pour cela, on pose une borne variable, là où se situe le problème, pour se ramener sur un segment, on réalise les calculs sur le segment à l'aide de la primitive choisie puis on fait tendre la borne variable vers la borne problématique. Si la limite obtenue est finie, l'intégrale converge et cette limite est sa valeur. Sinon l'intégrale diverge.

(1) Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$

(2) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t)dt$ converge-t-elle ?

Démonstration :

f) Si f est une fonction continue sur un segment $[a;b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est définie (elle n'est pas impropre) et donc elle converge.

g) Pour tout réel a, les intégrales $\int_a^{+\infty} 0dx$, $\int_{-\infty}^{a} 0dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx$ convergent et valent 0.

h) Soit f une fonction continue et positive sur $[a;+\infty[$ avec a un réel.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow$ La fonction F définie sur $[a;+\infty[$ par $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ est majorée sur $[a;+\infty[$.

On en déduit un résultat équivalent sur $]-\infty;a]$.

i) Théorème : Si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge avec f paire ou impaire alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De plus, en cas de convergence, si f est paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et si f est impaire, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

Remarque : Nous ne voyons que quelques cas particuliers des intégrales impropres dans le cadre du programme. En effet, la notion d'intégrale impropre peut être étendue vers des bornes réelles pour lesquelles la fonction n'est pas définie.

Exemple : $\int_0^e \ln(t)dt$ est impropre en 0.

3) Intégrales de référence :

a) Intégrales de Riemann : Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ d'où $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$.

Démonstration :

b) Intégrales d'exponentielles : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

c) Intégrale associée à la loi normale : Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ converge et vaut 1. La fonction utilisée est la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.

4) Propriétés des intégrales impropres : Ce sont les mêmes que pour les intégrales simples, SOUS RÉSERVE DE CONVERGENCE.

a) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur $[a;b[$ (ou $]a;b]$ ou $]a;b[$) avec a un réel et $b \to +\infty$ (ou $a \to -\infty$ et b un réel ou $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$).
$\int_a^b f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall c \in [a;b[$ $\left(\text{ou }]a;b] \text{ ou }]a;b[\right)$, $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent.
Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Remarques : $\int_a^b f(x)dx$ diverge $\Leftrightarrow$ $\exists c \in [a;b[$ ou $]a;b]$ ou $]a,b[$, $\int_a^c f(x)dx$ diverge ou $\int_c^b f(x)dx$ diverge.
Attention, lorsque $c \notin [a;b[$ $\left(\text{ou }]a;b] \text{ ou }]a;b[\right)$, il se pose des problèmes de convergence supplémentaires. Donc, nous éviterons ce genre de choix.

Exemple-Méthode : Comment utiliser la relation de Chasles ?

Si la fonction est continue sur le domaine et qu'il y a deux bornes où l'intégrale est impropre, on découpe l'intégrale en deux avec la relation de Chasles, de manière arbitraire (ou de manière imposée selon les exercices) et on étudie la convergence des deux intégrales.
On peut être amené à utiliser la relation de Chasles pour obtenir une des intégrales de référence du cours.

(1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-|x|}$. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ et calculer sa valeur.

Démonstration :

Remarque : on peut aussi traiter cet exemple par parité, ce qui est plus rapide.

b) Linéarité : Soit f une fonction continue sur $[a;b[$ (ou $]a;b]$ ou $]a;b[$) avec a un réel et $b \to +\infty$ (ou $a \to -\infty$ et b un réel ou $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$).

Si les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ convergent alors $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)+\lambda g(x)dx$ converge et

$\int_a^b f(x)+\lambda g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda\int_a^b g(x)dx$.

Attention : la réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que $\int_a^b f(x)+g(x)dx$ converge que $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ convergent.

Contre-exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}-\frac{1}{t}dt = \int_1^{+\infty} 0dt = 0$ converge et pourtant $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ et $-\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ divergent.

c) Positivité et croissance : Soit f et g deux fonctions continues sur $I=[a;b[$ (ou $]a;b]$ ou $]a;b[$) avec a un réel et $b \to +\infty$ (ou $a \to -\infty$ et b un réel ou $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$).

i) Si f est positive sur I et si $\int_a^b f(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Remarque : on a un résultat équivalent si f est négative sur I. Pour résumer, si la fonction garde un signe constant sur le domaine d'intégration alors l'intégrale convergente sur ce domaine garde ce même signe. Par contre, on ne peut rien conclure si f change de signe sur I.

ii) Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et si les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ convergent alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. (Croissance)

d) Attention : la propriété $-\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ n'est généralement pas autorisée avec une intégrale impropre.

5) Techniques de calcul, exemple-méthode : Comment utiliser l'intégration par partie ou réaliser un changement de variable ?

L'intégration par parties et l'utilisation d'un changement de variable sont possibles mais par contre ces techniques ne s'utilisent pas directement sur des intégrales impropres dans le cadre de notre programme. D'abord on se ramène à une intégrale définie sur un segment à l'aide d'une borne variable, on utilise le changement de variable ou l'intégration par partie sur le segment puis on passe à la limite pour la borne variable.

(1) Montrer la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

(2) Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} te^{1-t^2}dt$.

Démonstration :

2 – Intégrales impropres de fonctions continues par morceaux :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que f possède un nombre fini de points de discontinuité $(a_k)_{1\le k\le n}$ dans I.

Cela veut dire que sur chacun des intervalles de la forme $]a_k;a_{k+1}[$, la fonction f est continue, $\lim\limits_{\substack{x\to a_k\\x>a_k}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a_{k+1}\\x<a_{k+1}}} f(x)$ existent et sont finies. Donc f se prolonge par continuité en f_k sur $[a_k;a_{k+1}]$.

On dit que f est continue par morceaux sur I. Dans ce cas, $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)dx$ et $\int_I f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)dx$.

Dans cette situation, l'intégrale de f sur I est faussement impropre.

Exemple-Méthode : Comment étudier une intégrale impropre d'une fonction continue par morceaux ?

On découpe l'intégrale de f selon les points de discontinuité et on étudie la convergence de chaque intégrale obtenue.

(1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty;0[\\ e^{-2x} & \text{si } x\in[0;+\infty[\end{cases}$. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Démonstration :

3 – Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives :

Soit f et g deux fonctions continues (ou continues par morceaux) et positives sur $[a;+\infty[$ (ou $]-\infty;a]$) avec a un réel.

1) Comparaison globale : Si au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$), $0\le f(x)\le g(x)$ alors :

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. (ou $\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ converge).

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge. (ou $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ diverge).

Exemple important : Montrons la convergence de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$?

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

(1) a) Montrer que $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire.

b) Montrer que pour tout $t \in [1;+\infty[$, $0 \le e^{-\frac{t^2}{2}} \le e^{-\frac{t}{2}}$.

c) Exploiter les deux premières questions pour établir la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Démonstration :

2) Comparaison locale par négligeabilité : Si $f \underset{+\infty}{=} \circ(g)$ (ou $f \underset{-\infty}{=} \circ(g)$) alors :

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. (ou $\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ converge).

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge. (ou $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ diverge).

3) Comparaison locale par équivalence : Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ (ou $f \underset{-\infty}{\sim} g$) alors ;

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature. (ou $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ sont de même nature)

Attention : les intégrales ne sont pas équivalentes en cas de convergence.

4) Comparaison série-intégrale : Si une fonction f est continue, positive et décroissante sur $[a;+\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$, alors la série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Remarque : Ce théorème permet justifier la nature des séries de Riemann : Lorsque $\alpha > 0$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature selon la valeur de α par rapport à 1.

4 – Convergence absolue :

Soit f continue (ou continue par morceaux) sur $[a;b[$ (ou $]a;b]$ ou $]a;b[$) avec a un réel et $b \to +\infty$ (ou $a \to -\infty$ et b un réel ou $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$).

1) Définition : On dit que $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument si et seulement si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

2) <u>Théorème</u> : $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge. (La réciproque est fausse)

3) <u>Inégalité triangulaire</u> : Si $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument et si $a \leq b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

<u>Remarque</u> : Dans la formulation de ce cours, l'hypothèse $a \leq b$ est évidente.
La convergence absolue s'établit la plupart du temps par découpage de l'intégrale pour gérer la valeur absolue.
La notion de convergence absolue sera essentielle pour établir l'existence d'espérances dans le cadre de notre chapitre 8 ;