FONCTIONS NUMÉRIQUES DE DEUX VARIABLES RÉELLES

PRÉ-REQUIS DE PREMIÈRE ANNÉE :
L'ensemble $\mathbb{R}$: intervalles.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, produit cartésien d'ensembles de $\mathbb{R}$.
Fonctions : limites, continuité, dérivabilité, classes, extrema.
PRÉ-REQUIS DE DEUXIÈME ANNÉE :
Chapitre 4 : recherche de valeurs propres

1 – TOPOLOGIE :

1) Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$: Soient $(x_0;y_0)$ et (x ; y) deux couples de $\mathbb{R}^2$.

On appelle distance euclidienne entre ces couples, dans $\mathbb{R}^2$, le nombre réel $d((x;y),(x_0;y_0))=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.
Dans le plan repéré, il s'agit de la distance entre deux points.

2) Disques :
a) Disque ouvert : Soit $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ et r > 0 un réel. On appelle disque ouvert de centre $(x_0;y_0)$ et de rayon r l'ensemble des points $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $d((x;y),(x_0;y_0))<r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

b) Disque fermé : Soit $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ et r > 0 un réel. On appelle disque fermé de centre $(x_0;y_0)$ et de rayon r l'ensemble des points $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $d((x;y),(x_0;y_0))\le r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le r$.

3) Ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^2$:
a) Ouvert :
i) Définition : Une partie $U\subseteq\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ lorsque pour tout $(x_0;y_0)\in U$, il existe un disque ouvert de centre $(x_0;y_0)$, entièrement inclus dans U.

ii) Propriétés :
Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Si O et O' sont des ouverts de $\mathbb{R}$ alors $O\times O'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Fermé :
i) Définition : Une partie $U\subseteq\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ lorsque son complémentaire est un ouvert.
ii) Propriétés :
Toute intersection de fermés est un fermé.
Toute réunion finie de fermés est un fermé.
Si F et F' sont des fermés de $\mathbb{R}$ alors $F\times F'$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

c) En pratique : Il faudra préciser la nature topologique des ensembles sur les copies.
$\mathbb{R}^2$, tout disque ouvert, les ensembles de la forme $]a;b[\times]c;d[$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Tout disque fermé, les ensembles de la forme $[a;b]\times[c;d]$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

4) Bornés :
a) Partie bornée : une partie $U\subseteq\mathbb{R}^2$ est bornée s'il existe une réel K tel que U est incluse dans un disque de centre (0 ; 0) et de rayon K.

b) Propriété : Si I et J sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$ alors $I\times J$ est un borné de $\mathbb{R}^2$.

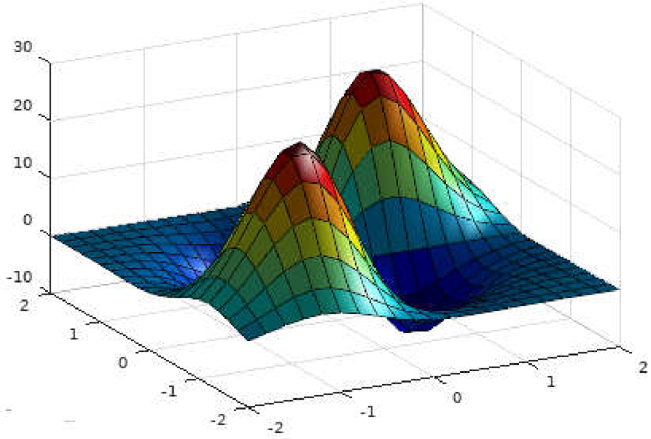
c) En pratique : les ensembles de la forme $]a;b[\times]c;d[$; $[a;b]\times[c;d]$ ou par exemple $[a;b]\times[c;d[$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, sont des bornés de $\mathbb{R}^2$. Si l'une des bornes des intervalles est infinie alors l'ensemble n'est pas un borné.

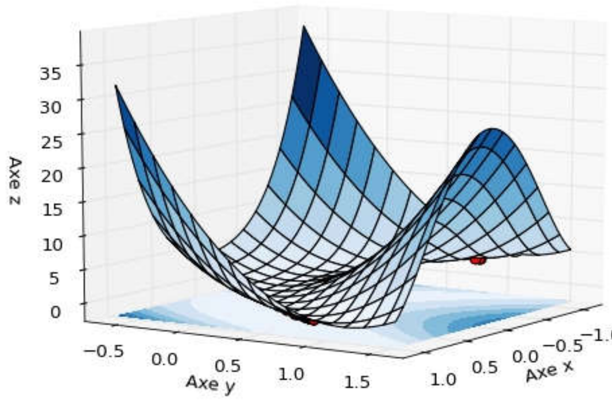
2 – Fonction continue sur $\mathbb{R}^2$:

1) Fonctions numériques de deux variables :

a) Définitions :
i) On appelle fonction numérique à deux variables x et y toute fonction définie sur une partie $E\times F$ de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

ii) Soit un repère orthogonal de l'espace $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Le graphe d'une fonction à deux variables est une surface ou nappe en 3D constituées de points de coordonnées $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $(x,y)\in E\times F$ et $z=f(x,y)$. (z s'appelle la côte du point)





iii) On associe $\forall x\in E\subseteq\mathbb{R}$, la fonction $f_x : y\mapsto f(x;y)$ définie sur $F\subseteq\mathbb{R}$ et $\forall y\in F\subseteq\mathbb{R}$, la fonction $f_y : x\mapsto f(x;y)$ définie sur $E\subseteq\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions partielles de f.

iv) Soit un réel k. On appelle ligne de niveau k, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / f(x,y)=k\right\}$. Quand il n'est pas vide, cet ensemble est représenté par une réunion de courbes situées sur la nappe qui représente f, de même cote k.

b) Fonctions projections : Ces sont les fonctions à deux variables définies par :
$P_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto x \end{cases}$ et $P_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto y \end{cases}$. On les appelle aussi fonctions projecteurs ou fonctions coordonnées.

c) Fonctions polynômiales : On appelle fonction polynomiale toute fonction à deux variables construite par combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x;y)\mapsto x^i y^j$ où i et j sont des entiers naturels.

Exemple : $(x;y)\mapsto 3x^4+5x^2y^3-3y^2+2xy-6$.

2) Chemin sur une surface représentative de fonction :

a) Définition : Soit f une fonction définie sur un ouvert $E\times F$ de $\mathbb{R}^2$. Considérons les applications u et v continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel $t\in I$, $\left(u(t),v(t)\right)\in E\times F$. L'application $\gamma : \begin{matrix} I\to E\times F \\ t\mapsto\left(u(t),v(t)\right)\end{matrix}$ est un chemin de $E\times F$ et on appelle chemin sur la surface représentative de f l'image par f de l'application γ.

b) Quelques chemins usuels passant par l'origine :
Soit a et b deux réels fixés. Les chemins ci-dessous sont à connaître :
$t\mapsto(t,0)$ et $t\mapsto(0,t)$
$t\mapsto(at,bt)$ avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$.
$t\mapsto\left(t^2,at\right)$ et $t\mapsto\left(at,t^2\right)$ avec $a\neq 0$.

3) Continuité d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. :

a) Soit f une fonction à deux variables définie sur $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0;y_0)\in E\times F$. On dit que f est continue en $(x_0;y_0)$ si et seulement si $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\ \forall(x;y)\in E\times F,\quad d\big((x;y),(x_0;y_0)\big)<\alpha\Rightarrow\left|f(x;y)-f(x_0;y_0)\right|<\varepsilon$.

Cela veut aussi dire que $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

b) On dit que f est continue sur $U\subseteq\mathbb{R}^2$ ssi f est continue pour tout $(x_0;y_0)\in U$.

4) Etude pratique de non continuité :

a) Propriété : Si f est continue en $(x_0;y_0)\in E\times F$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ où elle est définie, alors sa restriction à un chemin γ quelconque passant par $(x_0;y_0)$ est continue. Donc pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en $(x_0;y_0)\in E\times F$, il suffit de trouver un chemin γ tel que $\lim\limits_{\substack{(x;y)\to(x_0;y_0)\\ \gamma}} f(x;y)\neq f(x_0;y_0)$.

Exemple-Méthode : Comment montrer qu'une fonction à deux variables n'est pas continue en (0, 0) ?

On essaye les chemins précédents, un par un, jusqu'à ce qu'une limite quand t tend vers 0 mette en défaut l'image de (0, 0) par f.

(1) Montrer que la fonction suivante n'est pas continue en (0, 0) : f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Démonstration :

Remarque :

Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point $(x_0;y_0)\neq(0,0)$, on utilisera les mêmes chemins mais à partir de $(x_0;y_0)$. Exemples : $t\mapsto(x_0+t,y_0)$ et $t\mapsto(x_0,y_0+t)$ ou bien $t\mapsto(x_0+at,y_0+bt)$ avec $a\neq0$ et $b\neq0$.

Montrer qu'une fonction est continue en un point $(x_0;y_0)\in E\times F$ sera étudié en exercice sur des exemples simples. Utiliser la définition est un peu technique.

5) Opérations sur les fonctions continues – continuité globale :

a) Opérations classiques : La somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient (défini), de fonctions continues sur une partie $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$ sont continues sur $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$.

b) Composition : Soit f une fonction à deux variables définie et continue sur $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I\subseteq\mathbb{R}$ et soit φ une fonction définie et continue de I dans $\mathbb{R}$ alors la composé $\varphi\circ f$ est une fonction continue sur $E\times F$.

c) Fonctions usuelles :

i) Les fonctions projections sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple-méthode : Comment montrer qu'une fonction est globalement continue sur $E \times F \subseteq \mathbb{R}^2$?

Même si l'énoncé ne le demande pas explicitement, il faudra justifier ce genre de propriété dans les exercices des fonctions à deux variables. Le but est bien décomposer la fonction à étudier en fonction plus simples et de citer les opérations qui permettent de reconstituer la fonction. Attention, en cas d'utilisation de la composition des fonctions, les intervalles de transition doivent clairement apparaitre.

(1) Justifier que la fonction définie par $f(x;y) = \ln\left(1 + x^2 + e^y\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration :

3 – Calcul différentiel d'ordre 1 :

Dans la suite de ce chapitre, on considèrera que $E \times F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Dérivées partielles d'ordre 1 : Soit f une fonction définie sur $E \times F \subseteq \mathbb{R}^2$.
Si pour tout $y \in F$, la fonction $f_y : x \mapsto f(x;y)$ est dérivable sur E alors la fonction définie sur $E \times F$ qui à (x ; y) associe la dérivée de f_y, s'appelle dérivée partielle (d'ordre 1) de f par rapport à x. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_1 f$.
Si pour tout $x \in E$, la fonction $f_x : y \mapsto f(x;y)$ est dérivable sur F alors la fonction définie sur $E \times F$ qui à (x ; y) associe la dérivée de f_x, s'appelle dérivée partielle (d'ordre 1) de f par rapport à y. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou $\partial_2 f$.

Exemple-Méthode : Comment calculer les dérivées partielles première d'une fonction à deux variables ?

Pour $\partial_1 f$, la variable y est considérée comme constante et la variable x est la variable de dérivation.
Pour $\partial_2 f$, la variable x est considérée comme constante et la variable y est la variable de dérivation.
On applique les formules usuelles de dérivation.

(1) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x;y) = 3x^3y^2 - 4xy + 3x + 5$.

Démonstration :

2) Fonctions de classe C^1 : La fonction f est de classe C^1 sur $E \times F$ si et seulement si f admet des dérivées partielles premières et que celles-ci soient continues sur $E \times F$.

3) Lien entre continuité et caractère de classe C^1 : Si f est de classe C^1 sur $E \times F$ alors f est continue sur $E \times F$.

Remarque : Attention, ce n'est pas parce que f admet des dérivées partielles en $(x_0;y_0) \in E\times F$ que f est continue en $(x_0;y_0)$.

4) Opérations sur les fonctions de classe C^1 :

a) Opérations classiques : La somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient (défini), de fonctions de classe C^1 sur un ouvert $E\times F \subseteq \mathbb{R}^2$ sont de classe C^1 sur $E\times F \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) Composition : Soit f une fonction à deux variables définie et de classe C^1 sur $E\times F \subseteq \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subseteq \mathbb{R}$ et soit φ une fonction définie et de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ alors la composé $\varphi \circ f$ est une fonction de classe C^1 sur $E\times F$.

c) Fonctions usuelles :
i) Les fonctions projections sont C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Les fonctions polynomiales sont C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

5) Gradient d'une fonction en un point : Si f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(x_0;y_0)$, on appelle gradient de f en $(x_0;y_0)$, le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$: $\nabla(f)(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0;y_0) \\ \partial_2 f(x_0;y_0) \end{pmatrix}$.

6) Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe C^1 : Soit $(x_0;y_0) \in E\times F$. Si f est de classe C^1 sur $E\times F$ alors f admet un développement limité d'ordre 1 en $(x_0;y_0)$.
C'est-à-dire que pour tout couple $(h;k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h;y_0+k) \in E\times F$, on a :

$$f(x_0+h;y_0+k) \overset{(x_0,y_0)}{=} f(x_0;y_0) + h\partial_1(x_0;y_0) + k\partial_2(x_0;y_0) + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k) \text{ où } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

Remarques : $f(x_0+h;y_0+k) \overset{(x_0,y_0)}{=} f(x_0;y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0;y_0) \bullet \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$.
S'il existe, ce développement limité est unique.

4 – Calcul différentiel d'ordre 2 :

Rappelons que $E\times F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
1) Dérivées partielles d'ordre 2 : Soit f une fonction définie sur $E\times F \subseteq \mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur $E\times F$.

Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à x sur $E\times F$ alors f admet une dérivée partielle seconde par rapport à x sur $E\times F$. On la note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ou $\partial^2_{1,1} f$.

Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à y sur $E\times F$ alors f admet une dérivée partielle seconde par rapport à x puis par rapport à y sur $E\times F$. On la note $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ou $\partial^2_{2,1} f$.

Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à x sur $E\times F$ alors f admet une dérivée partielle seconde par rapport à y puis par rapport à x sur $E\times F$. On la note $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ou $\partial^2_{1,2} f$.

Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à y sur $E\times F$ alors f admet une dérivée partielle seconde par rapport à y sur $E\times F$. On la note $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ ou $\partial^2_{2,2} f$.

Exemple-Méthode : Comment calculer les dérivées partielles secondes d'une fonction à deux variables ?

Tout d'abord, il faut avoir calculé les dérivées partielles premières. Ensuite, on procède de la même manière que précédemment, en fixant une variable comme constante et l'autre comme variable de dérivation.

(1) Reprenons la fonction f précédente et déterminer les dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$. $f(x;y)=3x^3y^2-4xy+3x+5$.

Démonstration :

2) Fonctions de classe C^2 : On dit que f est de classe C^2 sur $E\times F$ si f admet des dérivées partielles secondes et que celles-ci soient continues sur $E\times F$.

3) Lien entre fonction de classe C^2 et fonctions de classe C^1 : Si f est de classe C^2 sur $E\times F$ alors f est de classe C^1 sur $E\times F$.

4) Opérations sur les fonctions de classe C^2 :

a) Opérations classiques : La somme, les combinaisons linéaires, le produit, le quotient (défini), de fonctions de classe C^2 sur un ouvert $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$ sont de classe C^2 sur $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$.

b) Composition : Soit f une fonction à deux variables définie et de classe C^2 sur $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I\subseteq\mathbb{R}$ et soit φ une fonction définie et de classe C^2 de I dans $\mathbb{R}$ alors la composé $\varphi\circ f$ est une fonction de classe C^2 sur $E\times F$.

c) Fonctions usuelles :

i) Les fonctions projections sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Les fonctions polynomiales sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

5) Théorème de Schwarz : Si f est une fonction de classe C^2 sur $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$ alors $\partial_{2,1}^2 f=\partial_{1,2}^2 f$.

6) Matrice hessienne d'une fonction de deux variables en un point :
Soit f est une fonction définie sur $E\times F\subseteq\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0;y_0)\in E\times F$. Si f admet des dérivées partielles secondes par rapport à x et y en $(x_0;y_0)$, on appelle matrice hessienne de f en $(x_0;y_0)$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\nabla^2(f)(x_0;y_0)=\begin{pmatrix}\partial_{1,1}^2 f(x_0;y_0) & \partial_{1,2}^2 f(x_0;y_0)\\ \partial_{2,1}^2 f(x_0;y_0) & \partial_{2,2}^2 f(x_0;y_0)\end{pmatrix}.$$

Remarque : Si f est de classe C^2 au voisinage de $(x_0;y_0)$ alors la matrice hessienne est symétrique. (Théorème de Schwarz)

7) Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2 :
Soit $(x_0;y_0)\in E\times F$. Si f est de classe C^2 sur $E\times F$ alors f admet un développement limité d'ordre 2 en $(x_0;y_0)$. C'est-à-dire que pour tout couple $(h;k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h;y_0+k)\in E\times F$, on a :

$$f(x_0+h;y_0+k)\underset{(x_0,y_0)}{=}f(x_0;y_0)+h\partial_1 f(x_0;y_0)+k\partial_2 f(x_0;y_0)+\frac{1}{2}\left(\partial_{1,1}^2 f(x_0;y_0)h^2+2\partial_{2,1}^2 f(x_0;y_0)hk+\partial_{2,2}^2 f(x_0;y_0)k^2\right)+\left(h^2+k^2\right)\varepsilon(h,k)$$

où $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$.

Remarque : $f(x_0+h;y_0+k)\underset{(x_0,y_0)}{=}f(x_0;y_0)+{}^t\nabla(f)(x_0;y_0)\bullet\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(h,k)\bullet\nabla^2(f)(x_0;y_0)\bullet\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\left(h^2+k^2\right)\varepsilon(h,k)$.

S'il existe, ce développement limité est unique.

5 – Extrema d'une fonction numérique de deux variables :

Rappelons que $E \times F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Extremum global d'une fonction numérique de deux variables sur une partie de $\mathbb{R}^2$:

Définition : La fonction f présente un extremum global dans $E \times F$, en $(x_0 ; y_0) \in E \times F$ ssi
$\forall (x,y) \in E \times F,\ f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ (max) ou $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$ (min).

2) Extremum local d'une fonction numérique de deux variables :

Définition : La fonction f présente un extremum local en $(x_0 ; y_0) \in E \times F$, s'il existe, dans $E \times F$, un disque autour de $(x_0 ; y_0)$ dans lequel $f(x_0 ; y_0)$ est un extremum c'est-à-dire :

$\exists r > 0, D((x_0,y_0),r) \subset E \times F$ et $\forall (x,y) \in D((x_0,y_0),r),\ f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ (max local) ou $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$ (min local).

3) Fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$:

Théorème : Si f est une fonction définie et continue sur une partie $E \times F \subseteq \mathbb{R}^2$ fermée et bornée alors f est bornée et atteint ses bornes sur $E \times F$. Donc elle admet un minimum et un maximum global sur $E \times F$.

4) Point critique :

Définition : Soit f admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur $E \times F$. On dit que $(x_0 ; y_0)$ est un point critique de f sur $E \times F$ si $(x_0 ; y_0)$ annule le gradient de f c'est-à-dire tel que $\nabla(f)(x_0 ; y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0 ; y_0) \\ \partial_2 f(x_0 ; y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5) Condition nécessaire d'existence d'un extremum :

Théorème : Soit f une fonction de classe C^1 sur $E \times F$. Si f admet un extremum (local ou global) en $(x_0 ; y_0) \in E \times F$ alors $(x_0 ; y_0)$ est un point critique de f.

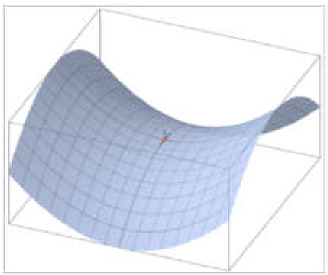
Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple : $f(x,y) = xy$. (0, 0) est point critique de f et il n'y a pas d'extremum en (0, 0), ce qui se démontre en raisonnant sur les signes de x et y.

La contraposée de ce théorème est : Si $(x_0 ; y_0)$ n'est pas un point critique de f alors f n'a pas d'extremum local en $(x_0 ; y_0)$.
Cela veut dire que si $E \times F$ est ouvert alors les extrema locaux, s'ils existent, seront à chercher parmi les points critiques de f.

6) Condition suffisante d'existence d'un extremum local :

Théorème : Soit f une fonction de classe C^2 sur $E \times F \subseteq \mathbb{R}^2$ et $(x_0 ; y_0)$ un point critique de f.



Si les valeurs propres de la matrice hessienne en $(x_0 ; y_0)$ sont strictement positives alors f admet un minimum local en $(x_0 ; y_0)$.
Si les valeurs propres de la matrice hessienne en $(x_0 ; y_0)$ sont strictement négatives alors f admet un maximum local en $(x_0 ; y_0)$.
Si les valeurs propres de la matrice hessienne en $(x_0 ; y_0)$ sont de signes opposés alors f admet un point selle (ou point col) en $(x_0 ; y_0)$.
Si l'une des valeurs propres de la matrice hessienne en $(x_0 ; y_0)$ est nulle alors on ne peut rien conclure.

Remarque 1 : Ces théorèmes ne prouvent pas que l'extremum est global.
Remarque 2 : Si $E \times F$ n'est pas un ouvert alors f peut avoir un extremum en un autre point qu'un point critique. (Exercices)
Rappel : Pour une matrice 2×2 de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les valeurs propres de A sont solutions de l'équation
$(a - X)(d - X) - bc = 0$.
Remarque 3 : Si l'équation précédente possède une seule solution, on considère qu'il y a deux fois la même valeur propre.

6 – Etude d'un exemple :

Soit la fonction définie $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$.

1) La fonction f a-t-elle de extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, préciser leur valeur.

2) La fonction f a-t-elle de extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

<u>Démonstration</u> :